

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С НИЗКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОДНОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

И. Е. Лобанов

Московский Авиационный институт, г. Москва, Россия

1. Введение

В настоящее время в целях тепловой защиты всё чаще применяются материалы с низким коэффициентом теплопроводности, который, как правило, растет с повышением температуры. Имеет место тенденция разработки новых теплоизолирующих материалов с все более низкими коэффициентами теплопроводности. Результатом чего является то, что решение линейной нестационарной задачи теплопроводности будет всё больше расходиться с решением нелинейной нестационарной задачи теплопроводности, что снижает точность прогнозирования нестационарных тепловых нагрузок. В связи с этим актуально рассмотрение очень важного случая нестационарной теплопроводности — случая нелинейной нестационарной теплопроводности для тел с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрической формы.

2. Решение нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрии

Существующие точные решения обратных задач нестационарной теплопроводности довольно немногочисленны, их гораздо меньше, чем решений прямой задачи нестационарной теплопроводности. Следует особо отметить, что одной из первых удачных попыток решения обратной задачи нестационарной теплопроводности для тела плоской геометрии впервые была предпринята ещё в 1890 г. Й. Стефаном [10]. Альтернативные решения одномерной линейной обратной задачи нестационарной теплопроводности было получено независимо друг от друга О.Р. Бургграфом [11] и Д. Лэнгфордом [12] в предположении известности в точке расположения датчика нестационарных температуры и плотности теплового потока. В.А. Коверьянов в [13] получил точные решения для полых цилиндров и сфер, где плотность теплового потока на активной поверхности детерминировалась дифференцированием поля температур. Точное решение для поля температур по известным температурам в двух различных внутренних точках методом интегрального преобразования Лапласа было получено М. Имбером и Д. Кханом [14]. Запишем уравнение нелинейной нестационарной теплопроводности для тела одномерной геометрии в следующем виде [1, 2]:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla^2 T + \frac{d(\ln \lambda)}{dT} (\nabla T)^2. \quad (1)$$

Обратная задача теплопроводности для уравнения (1) состоит в нахождении граничных условий на поверхности одномерного тела при известных нестационарных температуре и тепловому потоку и теплофизических характеристиках материала тела, зависящих от температуры произвольным, но заранее известным образом. Уравнение (1) является другой

записью уравнения теплопроводности в каноническом виде: $c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T)$.

Обратная задача теплопроводности для уравнения (1) состоит в нахождении граничных условий на поверхности одномерного тела при известных нестационарных температуре и тепловому потоку и теплофизических характеристиках материала тела, зависящих от температуры. В теле плоской геометрической формы на расстоянии δ от активной поверхности располагается датчик. Из показаний датчика известны температура $T_1(\tau)$ и плотность теплового потока $q_1(\tau)$ на расстоянии δ от активной поверхности. Необходимо детерминировать поля плотности теплового потока $q(x; \tau)$ и температуры $T(x; \tau)$. Здесь можно сказать, что для вышеуказанные параметры области $x > \delta$ могут быть детерминированы с помощью прямой задачи. Данная постановка граничных условий приводит к математически некорректно поставленной задаче: на одной границе задано 2 граничных условия, а на другой не задано ни одного. В данном случае некорректность может быть устранена, если нет разрывов в производных всех порядков граничных условий по времени [1]. С помощью введения интегральной функции

$$G(T) = \int_{T_0}^T \lambda(T) dT \quad (2)$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = a \nabla^2 G. \quad (3)$$

Теперь проанализируем функцию $G(T, x, \tau)$ в зависимости от величины коэффициента теплопроводности. При высоких значениях коэффициента теплопроводности, характерных, например, для металлов, ее производная по температуре велика, поэтому зависимость коэффициента температуропроводности от нее будет значительной. При малых значениях коэффициента теплопроводности, характерных, например, для теплоизоляторов, вышеупомянутая производная будет близка к нулю, следовательно, зависимость коэффициента температуропроводности от нее будет слабой. Учитывая вышесказанное, будет вполне справедливо следующее допущение:

$$G(T, x, \tau) \approx G(x, \tau). \quad (4)$$

В [15, 16] показаны зависимости производной функции G по температуре $(\partial G / \partial T)$ для металлов (медь) и теплоизоляторов (нагар). Исходя из допущения (4), справедливого только для тел с низким значением коэффициента теплопроводности, следует, что коэффициент температуропроводности a не является функцией G (зависимость коэффициента температуропроводности a от функции G настолько мала для тел с низким коэффициентом теплопроводности λ , что ею можно пренебречь). Следовательно, основываясь на принятых ранее допущениях, уравнение (3) является линейным относительно функции G . Следует отметить, что в том случае, когда коэффициент теплопроводности λ зависит от температуры, а коэффициент температуропроводности a — нет, то все решения обратной задачи теплопроводности, полученные ниже, являются точными аналитическими решениями обратной нестационарной задачи теплопроводности для тел одномерной геометрии. Вышеуказанный случай может с полным на то основанием иметь место также в том случае, когда относительно зависимости коэффициента

температуропроводности a от температуры нет достаточно надежных данных (получены с довольно большой погрешностью). Учитывая последнее утверждение, решение обратной задачи (3) относительно функции $G(x, \tau)$ примет следующий вид [1, 2]:

$$G(x, \tau) = G_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} + \frac{(\delta-x)}{\lambda(T_1)} \left[g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n g_1}{d\tau^n} \right] \quad (5)$$

где $G_1(T) = \int_{T_1}^T \lambda(T) dT$, $g_1 = -\lambda(T_1) \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=\delta}$.

Решение для функции $g(x, \tau) = -\lambda(T) \frac{\partial G}{\partial x}$ выглядит следующим образом:

$$g(x, \tau) = g_1(\tau) + \lambda(T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{(\delta-x)^{2n-1}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n g_1}{d\tau^n}. \quad (6)$$

Если заранее известна зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры, то искомые граничные условия (а также соответствующие параметры во внутренних точках тела) — температура и плотность теплового потока — можно относительно нетрудно определить с помощью решения нелинейных уравнений (5) и (6) соответственно.

2.1. Решение нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким значением коэффициента теплопроводности плоской геометрической формы в случае линейной его зависимости от температуры

Случай линейной зависимости коэффициента теплопроводности λ от температуры является очень важным, поскольку для теплоизоляционных материалов, а также для материалов с низким значением коэффициента теплопроводности λ , как правило, имеет место линейная его зависимость от температуры [3]:

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 + \beta T), \quad (7)$$

причем коэффициент β , как правило, положителен и составляет порядка: $\beta \sim (10^{-4} \div 10^{-3}) \text{ K}^{-1}$ [3].

Чтобы получить решения относительно температуры и плотности теплового потока, сначала необходимо детерминировать значения G_1 и g_1 . Значение функции G_1 находится с помощью интегрирования правой части уравнения (7):

$$G_1 = \lambda_0 \left[(T_1 - T_0) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_0^2) \right]. \quad (8)$$

Значение функции g_1 детерминируется, согласно определению:

$$g_1 = -\lambda(1 + \beta T_1) \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=\delta}. \quad (9)$$

После дифференцирования получим:

$$g_1 = \lambda_0(1 + \beta T_1)q_1. \quad (10)$$

Подставив (8) в (5), получим квадратное уравнение относительно нестационарной температуры:

$$\lambda_0 \left[(T - T_0) + \frac{\beta}{2} (T^2 - T_0^2) \right] = \lambda_0 \left[(T_1 - T_0) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_0^2) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} + \frac{(\delta - x)}{\lambda(T_1)} \left[g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n g_1}{d\tau^n} \right]. \quad (11)$$

Упростив (11), получим квадратное уравнение относительно нестационарной температуры в каноническом виде:

$$\left(\lambda_0 \frac{\beta}{2} \right) T^2 + (\lambda_0) T + \left(-\lambda_0 \frac{\beta}{2} T_1^2 - \lambda_0 T_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} - \frac{(\delta - x)}{\lambda(T_1)} \left[g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n g_1}{d\tau^n} \right] \right) = 0. \quad (12)$$

Решив квадратное уравнение (12), после отбрасывания корня, не соответствующего физическим условиям, получим:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\langle \left[\left\{ 1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \frac{1}{\lambda_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} + \frac{(\delta - x)}{\lambda(T_1)} \left(g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n g_1}{d\tau^n} \right) \right] \right\} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\rangle. \quad (13)$$

Плотность теплового потока выгоднее всего определить с помощью применения определения функции g :

$$g = \lambda_0(1 + \beta T)q. \quad (14)$$

Учитывая (14) запишем решение для нестационарной плотности теплового потока:

$$q(x, \tau) = \frac{\left\{ g_1 + \lambda_0(1 + \beta T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{(\delta-x)^{2n-1}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^n}{a^n(T_1)} \frac{d^n g_1}{d\tau^n} \right\}}{\lambda_0[1 + \beta T(x, \tau)]}. \quad (15)$$

Недостаток выражения (15) заключается в том, что для определения плотности теплового потока необходимо предварительно детерминировать нестационарную температуру $T(x, \tau)$ по формуле (13). Теперь следует перейти к непосредственному получению точных аналитических решений нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности для тела плоской геометрии. С этой целью перепишем функцию G_1 в следующем виде:

$$G_1 = \lambda_0 \left[(T_1 - T_0) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_0^2) \right] = \lambda_0 \left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) - \lambda_0 \left(T_0 + \frac{\beta}{2} T_0^2 \right). \quad (16)$$

Функцию g_1 запишем в следующем виде:

$$g_1 = \lambda_0(1 + \beta T_1) q_1 = \lambda_0 q_1 + \lambda_0 \beta T_1 q_1. \quad (17)$$

Далее следует детерминировать производные n -го порядка от функций G_1 и g_1 по времени — $\frac{d^n G_1}{d\tau^n}$ и $\frac{d^n g_1}{d\tau^n}$ — соответственно:

$$\frac{d^n G_1}{d\tau^n} = \frac{d^n}{d\tau^n} \left[\lambda_0 \left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) - \lambda_0 \left(T_0 + \frac{\beta}{2} T_0^2 \right) \right] = \lambda_0 \frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \lambda_0 \frac{\beta}{2} \frac{d^n T_1^2}{d\tau^n}; \quad (18)$$

$$\frac{d^n g_1}{d\tau^n} = \frac{d^n}{d\tau^n} [\lambda_0 q_1 + \lambda_0 \beta T_1 q_1] = \lambda_0 \frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \lambda_0 \beta \frac{d^n T_1 q_1}{d\tau^n}. \quad (19)$$

После детерминирования соответствующих производных функций G_1 и g_1 можно записать решения для температуры и плотности теплового потока соответственно в следующем виде:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\langle \left[\left[1 + 2\beta \left[T_1 \left(1 + \frac{\beta}{2} T_1 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n T_1^2}{d\tau^n} + \frac{(\delta-x)}{\lambda_0(1 + \beta T_1)} \left((1 + \beta T_1) q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \beta \frac{d^n T_1 q_1}{d\tau^n} \right) \right) \right] \right] - 1 \right\rangle. \quad (20)$$

$$q(x, \tau) = \left(1 + 2\beta \left[T_1 \left(1 + \frac{\beta}{2} T_1 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n T_1^2}{d\tau^n} + \frac{(\delta - x)}{\lambda_0(1 + \beta T_1)} \left((1 + \beta T_1) q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \beta \frac{d^n T_1 q_1}{d\tau^n} \right) \right) \right] \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left((1 + \beta T_1) q_1 + \lambda_0(1 + \beta T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{(\delta - x)^{2n-1}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \frac{d^n T_1^2}{d\tau^n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta - x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \beta \frac{d^n T_1 q_1}{d\tau^n} \right) \right). \quad (21)$$

Расчёт по решениям (20)—(21) требует отыскания производных по времени от произведения температуры и плотности теплового потока, а также от квадрата температуры — $T_1 \cdot q_1$ и T_1^2 — соответственно.

Для приведения вышеуказанных решений к каноническому виду [1, 2], который используется для решений линейной нестационарной задачи теплопроводности, необходимо выразить эти решения через производные по времени от собственно температуры и плотности теплового потока.

Для этой цели необходимо воспользоваться следующим свойством производных n -го порядка:

$$\frac{d^n}{d\tau^n} (f_1 \cdot f_2) = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{d^m f_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} f_2}{d\tau^{n-m}} = \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m f_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} f_2}{d\tau^{n-m}}, \quad (22)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты (число сочетаний из n элементов по m). Следовательно, производные функций G и g примут следующий вид:

$$\frac{d^n G_1}{d\tau^n} = \lambda_0 \frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \lambda_0 \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}}, \quad (23)$$

$$\frac{d^n g_1}{d\tau^n} = \lambda_0 \frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \lambda_0 \beta \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} q_1}{d\tau^{n-m}}. \quad (24)$$

Применив последнее свойство, получим точное решение нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности плоской геометрии, приведенное к вышесказанному каноническому виду.

Для нестационарной температуры:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\{ \left[1 + 2\beta \left[T_1 \left(1 + \frac{\beta}{2} T_1 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n T_1^2}{d\tau^n} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{(\delta-x)}{\lambda_0(1+\beta T_1)} \left((1+\beta T_1) q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \beta \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} q_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (25)$$

Для нестационарной плотности теплового потока:

$$q(x, \tau) = \frac{\left\{ (1 + \beta T_1) q_1 + \lambda_0 (1 + \beta T_1) \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{(\delta-x)^{2n-1}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \beta \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} q_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right\}}{\left[1 + 2\beta \left[T_1 \left(1 + \frac{\beta}{2} T_1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\delta-x)}{\lambda_0(1+\beta T_1)} \left((1+\beta T_1) q_1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(\delta-x)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n q_1}{d\tau^n} + \beta \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} q_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right) \right] \right\}}. \quad (26)$$

Расчетные значения температуры и плотности теплового потока для слоя нагара, полученные по формулам (13), (20), (25) и (11), (21), (26) соответственно, а также сопоставление с расчетными данными, полученными в результате решения линейной обратной задачи теплопроводности [4], приведены в [15, 16]. Расхождение между нестационарной температурой, рассчитанной с применением решений линейной и нелинейной задачи теплопроводности для слоя нагара величиной 10мкм составляет, в среднем, порядка 5,7%, а для нестационарной плотности теплового потока соответствующая величина составляет 5,5%. Анализ результатов, представленных на в [15, 16], позволяет сделать вывод о том, что учет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для тел с низким его значением приводит к относительно существенным отклонениям в отношении температуры, в то время как отклонения плотности теплового потока могут быть признаны как относительно незначительные. Существующие решения обратной нестационарной линейной задачи теплопроводности для тела плоской геометрической

формы [1, 2] являются частным случаем полученных в данном исследовании решений обратной нестационарной нелинейной задачи теплопроводности для тела плоской геометрической формы при условии $\lim \beta \rightarrow 0$.

3. Решение нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности, имеющего форму сплошного цилиндра или шара

Для сплошных цилиндра и шара тепловой поток одномерен в радиальном направлении, датчик температуры располагается в центре. Запишем решения относительно функций для цилиндра и шара соответственно [1], применив тот же самый подход, как в случае с телом плоской геометрической формы:

$$G_{\text{ЦИЛИНДР}}(r, \tau) = G_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(R-r)^{2n}}{2^{2n} a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n}, \quad (27)$$

$$G_{\text{ШАР}}(r, \tau) = G_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n}, \quad (28)$$

$$g_{\text{ЦИЛИНДР}}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n!)^2} \frac{(R-r)^{2n-1}}{2^{2n-1} a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n}, \quad (29)$$

$$g_{\text{ШАР}}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n-1}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n}, \quad (30)$$

где $G_1(T) = \int_{T_1}^T \lambda(T) dT$, $g_1 = -\lambda(T_1) \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R}$.

В случае известных зависимостей коэффициента теплопроводности λ от температуры, искомые температура и тепловой поток могут быть успешно определены с помощью решения нелинейных уравнений (27)—(30).

3.1. Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности для сплошных цилиндра и шара с низким коэффициентом теплопроводности в случае его линейной зависимости от температуры

Для сплошных цилиндра и шара соответственно данная задача решается точно так же, как и для тела плоской геометрической формы, поскольку исходные положения и принятые допущения останутся справедливыми и для последних случаев.

Для сплошных цилиндра и шара соответственно решения будут выглядеть следующим образом [1, 2] (индексы: "ц" — цилиндр, "ш" — шар):

$$T_{\text{ц}}(r, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\langle \sqrt{1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \frac{1}{\lambda_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(R-r)^{2n}}{2^{2n} a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} \right] \right]} - 1 \right\rangle, \quad (31)$$

$$q_{II}(r, \tau) = \frac{1}{\lambda_0 [1 + \beta T_{II}(x, \tau)]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n!)^2} \frac{(\delta - x)^{2n-1}}{2^{2n-1} a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n}, \quad (32)$$

$$T_{III}(r, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\langle \sqrt{1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \frac{1}{\lambda_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n}}{a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n} \right] \right]} - 1 \right\rangle, \quad (33)$$

$$q_{III}(r, \tau) = \frac{1}{\lambda_0 [1 + \beta T_{III}(x, \tau)]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n-1}}{2^{2n-1} a^n(T_1)} \frac{d^n G_1}{d\tau^n}. \quad (34)$$

После приведения к каноническому виду, решения (31)—(34) примут следующий вид:

$$T_{II}(r, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\langle \sqrt{1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(R-r)^{2n}}{2^{2n} a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right]} - 1 \right\rangle, \quad (35)$$

$$q_{II}(r, \tau) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n!)^2} \frac{(\delta - x)^{2n-1}}{2^{2n-1} a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right)}{\sqrt{1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(R-r)^{2n}}{2^{2n} a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right]}}, \quad (36)$$

$$T_{III}(r, \tau) = \frac{1}{\beta} \left\langle \sqrt{1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right]} - 1 \right\rangle, \quad (37)$$

$$q_{III}(r, \tau) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n-1}}{2^{2n-1} a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right)}{\sqrt{1 + 2\beta \left[\left(T_1 + \frac{\beta}{2} T_1^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(R-r)^{2n}}{a^n(T_1)} \left(\frac{d^n T_1}{d\tau^n} + \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^m T_1}{d\tau^m} \frac{d^{n-m} T_1}{d\tau^{n-m}} \right) \right]}}. \quad (38)$$

Существующие решения обратной нестационарной линейной задачи теплопроводности для сплошных цилиндра или шара [1, 2] являются частным случаем полученных в данном исследовании решений обратной нестационарной нелинейной задачи теплопроводности для сплошных цилиндра или шара при условии $\lim \beta \rightarrow 0$. В этом можно убедиться, взяв соответствующие пределы при $\lim \beta \rightarrow 0$ и получив классические решения, хотя полученные решения не существуют при $\lim \beta \rightarrow 0$ (разрыв первого рода или устранимый разрыв).

Вышеуказанные полученные решения нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности были успешно применены в качестве составной части сопряжённой задачи при детерминировании оценки максимального влияния слоя нагара на поверхности камеры сгорания на нестационарные параметры рабочего тела при радиационно-конвективном теплообмене [9].

4. Заключение

1. Решения обратной нелинейной нестационарной задачи теплопроводности для тел с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрической формы, полученные в данной работе, позволяют с достаточной степенью точности восстанавливать граничные условия по измерениям датчика теплового потока.
2. Полученные соотношения полностью соответствуют экспериментальным результатам исследования физических процессов, протекающих в слое нагара, образованного на тепловоспринимающих поверхностях камер сгорания энергетических установок рассматриваемого типа [4—7].
3. Полученные ранее решения [8] являются частными случаями решений, полученных в данной работе.
4. Нижеприведенные решения будут точными в случае, когда коэффициент температуропроводности не будет зависеть от температуры, в то время как коэффициент теплопроводности может зависеть от температуры.
5. Проведенные расчеты показали, что зависимость коэффициента теплопроводности от температуры может достаточно существенно влиять на детерминируемую температуру поверхности.
6. С практической точки зрения эти решения могут быть использованы при расчете нестационарных полей температур и плотности теплового потока для материалов с низким коэффициентом теплопроводности, применяемых в авиационной технике.

Обозначения

a — коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$; ρ — плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; c — удельная теплоёмкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; x — текущая координата, отсчитываемая от активной поверхности тела плоской геометрии, м ; r — текущий радиус, отсчитываемый от активной поверхности цилиндра или шара, м ; δ — толщина тела плоской геометрии, м ; R — радиус цилиндра или шара, м ; τ — время, с ; T_0 — начальная температура, К ; λ_0 — коэффициент теплопроводности при начальной температуре T_0 , $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; T_1 — измеряемая датчиком теплового потока нестационарная температура, К ; q_1 — измеряемая датчиком теплового потока нестационарная плотность теплового потока, $\text{Вт}/\text{м}^2$.

Литература

1. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
2. Тёмкин А.Г. Обратные задачи теплопроводности. М.: Энергия, 1973. 464 с.
3. Теплопроводность твердых тел / Под ред. А.С.Охотина. М.: Энергоатомиздат, 1984.

4. Кавтарадзе Р.З., Лапушкин Н.А., Лобанов И.Е. Исследование теплоизолирующего действия слоя нагара на поверхностях КС дизеля с использованием обратных и сопряженных методов теплопроводности // Изв. вузов. Машиностроение. 1997. № 4—6. С. 66—71.

5. Кавтарадзе Р.З., Лапушкин Н.А., Лобанов И.Е. Расчетно-экспериментальное исследование нестационарного теплообмена в камере сгорания быстроходного дизеля с учетом теплоизолирующего действия слоя нагара // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС. Материалы VI международного научно-практического семинара. Владимир, 1997. С. 111—112.

6. Кавтарадзе Р.З., Лапушкин Н.А., Лобанов И.Е. Исследование теплоизолирующего действия слоя нагара с применением обратных и сопряженных методов теплопроводности // Двигатель—97. Материалы международной научно-технической конференции. М., 1997. С. 25.

7. Лобанов И.Е. Локальный радиационно-конвективный теплообмен в турбулентном пограничном слое в камерах сгорания быстроходных дизелей: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М., 1998. 173 с.

8. Лобанов И.Е. Аналитическое решение нелинейной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрии // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Программа XII Школы-семинара молодых учёных и специалистов под руководством академика РАН А.И.Леонтьева. М.: МЭИ, 1999. С. 10.

9. Лобанов И.Е., Доценко А.И. Влияние слоя нагара на поверхностях камер сгорания на параметры рабочего тела // Механизация строительства. 2009. № 5. С. 23—26.

10. Stefan J. Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie Wiss., Wien., Math. naturwiss. Kl. 1890. V. 98 (2a). S. 956—973.

11. Бургграф О.Р. Точное решение обратной задачи в теории теплопроводности и её приложениях // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия С: Теплопередача. 1964. № 3. — С. 94—106.

12. Langford D. New analytical Solutions of the One-Dimensional Heat Equation for Temperature and Heat Flow Rate Both Prescribed at the Same Fixed Boundary (with applications to the phase change problem) // Q. App. Math. 1976. 24 (4). P. 315—322.

13. Коверьянов В.А. Обратная задача нестационарной теплопроводности // Теплофизика высоких температур. 1967. Т. 5. № 1. С. 141—148.

14. Имбер М., Кхан Д. Расчёт нестационарного распределения температуры на основании показаний теплопар, расположенных внутри тела // Ракетная техника и космонавтика. 1972. № 2. С. 83—90.

15. Лобанов И.Е. Точные аналитические решения нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тел с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрии // Альманах современной науки и образования. 2010. № 8 (39). С. 56—64.

16. Лобанов И.Е. Точные аналитические решения нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности // Известия вузов. Авиационная техника. 2010. № 3. С. 72—74.