

УДК 53.082.56, 536.242, 532.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ИМПАКТНОЙ СТРУЕ МЕТОДОМ PLIF В КОМБИНАЦИИ С PIV

С.В. Алексеенко<sup>1</sup>, А.В. Бильский<sup>1</sup>, Ю.А. Ложкин<sup>1</sup>,  
Д.М. Маркович<sup>1</sup>, А.С. Небучинов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт теплофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*Работа посвящена исследованию нестационарного теплообмена в пристенной части турбулентной струи воды, натекающей на нагреваемую поверхность. Для изучения влияния когерентных структур на теплообмен и способов управления теплообменом путем внешнего возмущения потока была реализована и применена комбинация методов PLIF и PIV, предназначенная для одновременного измерения мгновенных полей температуры и скорости в сечении потока жидкости. Такая информация позволяет рассчитывать корреляции пульсаций скорости и температуры, характеризующие интенсивность турбулентного переноса тепла. Представлены результаты измерений для различных режимов течения, показана зависимость интенсивности турбулентного переноса тепла от частоты внешнего возмущения потока.*

**1. Введение.** Метод плоскостной лазерно-индуцированной флуоресценции (PLIF) предназначен для измерения температуры и концентрации в потоках жидкости и газа. Основными преимуществами метода по сравнению с другими способами измерения температуры (термопары, ИК детекторы и др.) являются: возможность регистрации мгновенных полей в выбранном сечении потока и невозмущающий характер измерений. Еще одно достоинство метода — возможность одновременно с полями температуры измерять поля скорости методом цифровой трассерной визуализации (PIV) в том же сечении потока. Данная информация позволяет рассчитывать корреляции между потоком тепла и потоком импульса и является важной для понимания процессов переноса, как в классических задачах тепломассопереноса, так и в реальных технологических аппаратах.

Метод PLIF основывается на естественной флуоресценции молекул органического красителя, возбуждаемой лазерным излучением. Интенсивность  $I$  излученного красителем света на единицу объема зависит от энергии возбуждающего света  $I_0$ , квантового выхода красителя  $\phi$ , коэффициента абсорбции света красителем  $\epsilon$  и его концентрации в растворе  $C$  [9]:

$$I = I_0 C \phi \epsilon \quad (1)$$

Концентрация красителя предполагается достаточно малой, и ослаблением света при его распространении через раствор можно пренебречь. Для ряда красителей квантовый выход зависит от температуры, что позволяет измерять мгновенные распределения температуры в потоке. При полевых измерениях для освещения сечения потока используется импульсный лазер, из луча которого формируется световой нож. Так как флуоресценция происходит на большей длине волны, чем поглощение, то излученный красителем свет отделяется от света лазера при помощи светофильтра и регистрируется цифровой камерой. Дополнив установку второй камерой и добавив в поток отражающие свет частицы, можно одновременно с полями температуры измерять поля скорости методом PIV в том же сечении потока [4, 9]. Основными источниками погрешности измерений в методе PLIF являются нестабильность энергии лазерного импульса, непостоянство ее распределения по лучу и тепловой шум камеры [11].

Процедуры обработки мгновенных PLIF изображений должны компенсировать влияние этих факторов для снижения погрешности измерений.

Метод Particle Image Velocimetry (PIV) позволяет измерять поля скорости в выбранном сечении потока жидкости или газа. Измерение мгновенного поля скорости потока основано на определении перемещения частиц примеси, находящихся в измерительной плоскости, за фиксированный интервал времени. В поток жидкости или газа добавляются частицы малого размера (трассеры), измерительная плоскость дважды освещается импульсным световым ножом, образы частиц регистрируются на два кадра цифровой камеры. Последующая обработка пар изображений позволяет рассчитать смещения частиц за время между вспышками источника света и построить двухкомпонентное поле скорости [8].

Известно, что теплообмен в струе, натекающей на поверхность, полностью определяется гидродинамикой. Значительный вклад в теплообмен дают когерентные структуры и отрывные течения, индуцированные этими структурами. Замечено, что при наложении возмущений (пульсаций расхода) структура потока значительно изменяется, даже если амплитуда возмущений существенно меньше амплитуды турбулентных пульсаций скорости в струе. Воздействуя на поток возмущениями различной частоты можно добиться как усиления, так и ослабления когерентных структур. Вследствие изменения гидродинамической структуры потока изменяется интенсивность теплообмена. Возбуждение струи на разных частотах приводит как к усилению, так и к ослаблению интегрального теплообмена [6]. При всем многообразии работ, посвященных исследованию гидродинамических и теплообменных процессов, механизмы переноса тепла, роль когерентных структур и локальных отрывов в настоящий момент являются слабо изученными. Когда речь идет о вкладе когерентных структур в те или иные процессы переноса, используют, как правило, качественные оценки. Например, известно, что когерентные структуры являются самыми крупными вихревыми образованиями в потоке и содержат в себе значительную часть кинетической энергии турбулентности. Количественная оценка показывает, что доля когерентных структур может достигать до 40–50 % от полной энергии турбулентных пульсаций [12]. При этом роль когерентных структур в процессах перемешивания и уноса тепла неоднозначна. Когерентные структуры конвективным образом переносят мелкомасштабную турбулентность, слабо взаимодействуя с ней. Но интенсификация процессов теплообмена в области натекания струи предположительно происходит не за счет усиления когерентных структур, а за счет усиления мелкомасштабных пульсаций в сдвиговом слое [6]. Гидродинамический пограничный слой у стенки остается ламинарным до расстояний порядка 1,5–2 калибров сопла от критической точки. На этих расстояниях происходит турбулизация пограничного слоя [7] и, как следствие, интенсификация уноса тепла и увеличение трения, о чем свидетельствуют вторичные максимумы в распределениях трения и числа Нуссельта. Причина турбулизации пограничного слоя окончательно не ясна. Однако можно предположить, что к этому приводит отрыв потока, который возникает как следствие локальных положительных градиентов давления, индуцированных когерентными структурами [3].

Одной из целей данной работы является реализация методики PLIF для измерений температуры и ее комбинации с методом PIV. Вторая задача — это экспериментальное исследование нестационарного теплообмена в пристенной части турбулентной импактной струи с наличием крупномасштабных структур и отрывных течений, а также поиск возможных механизмов управления теплообменом путем внешнего возмущения потока. Комбинация методов PIV/PLIF для одновременного измерения мгновенных полей скорости и температуры была выбрана, как позволяющая получить

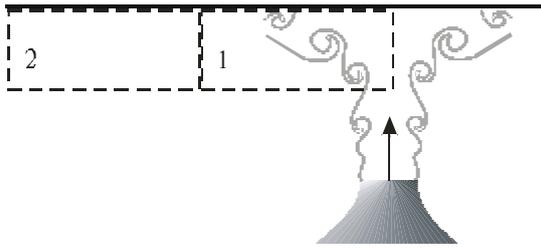


Рис. 1. Схема потока и измерительные области

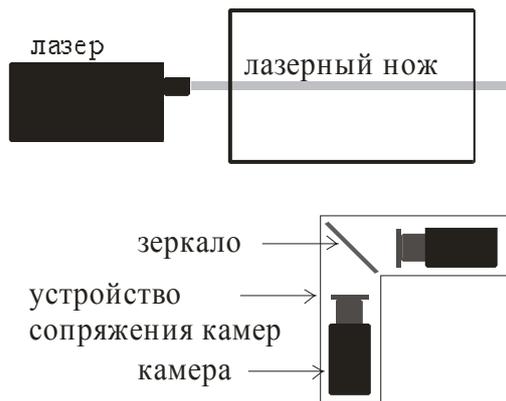


Рис. 2. Схема установки оборудования (вид сверху)

струе менее  $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) и электромеханический вибратор для создания пульсаций расхода заданной амплитуды и частоты.

Измерения проводились в пристенной части струи (выделено пунктиром на рис. 1) при помощи комбинации методов PIV/PLIF с использованием Stereo-PIV измерительной системы «ПОЛИС». Схема установки лазера и камер приведена на рис. 2. Измерительная плоскость в потоке освещается двойным импульсным Nd:YAG лазером (длина волны 532 нм), из луча которого при помощи объектива формируется световой нож толщиной 1 мм. Рассеянный трассерами и излученный флуорофором свет разделяется при помощи дихроичного зеркала, отражающего свет с длинами волн более 540–550 нм и пропускающего свет с меньшими длинами волн. Пропущенный и отраженный зеркалом свет регистрируется на две цифровые камеры с соответствующими светофильтрами. Для регистрации одной области пространства двумя камерами, камеры устанавливаются на специальное устройство сопряжения, как показано на рис. 2. Используемые камеры (Видеоскан 201Д) позволяют регистрировать два кадра с малой (десятки микросекунд) задержкой, что необходимо для измерения скорости методом PIV. Разрядность АЦП камер составляет 10 бит.

**3. Схема измерений и обработки данных.** Согласно [5], основной сложностью при проведении одновременных PIV/PLIF измерений является необходимость регистрации одной и той же области двумя камерами. Так как упомянутое выше устройство сопряжения не позволяет установить камеры с необходимой точностью, то для сопоставления изображений с двух камер была применена калибровка по изображениям мишени, аналогичная калибровке при Stereo-PIV измерениях. В измерительную плоскость помещалась прямоугольная пластина с регулярно

принципиально новую информацию о турбулентных характеристиках потока, таких как турбулентный перенос тепла.

**2. Измерительная установка.** Объект исследования схематично изображен на рис. 1. Затопленная круглая струя воды, направленная вертикально вверх, натекает на горизонтальную электрически нагреваемую поверхность стальной фольги (выделяемая мощность  $3.3\text{ Вт/см}^2$ ). В рабочую жидкость добавлены флуорофор Rhodamine B (убывание интенсивности 2–3 % на  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  [2]) в концентрации 100 мкг/л и отслеживающие поток полиамидные частицы (трассеры), плотность которых близка к

плотности воды. Сопло имеет профиль Витошинского, диаметр на срезе сопла — 15 мм. Установка представляет собой замкнутый гидродинамический контур, включающий в себя термостат для поддержания заданной постоянной температуры рабочей жидкости (изменение температуры в натекающей

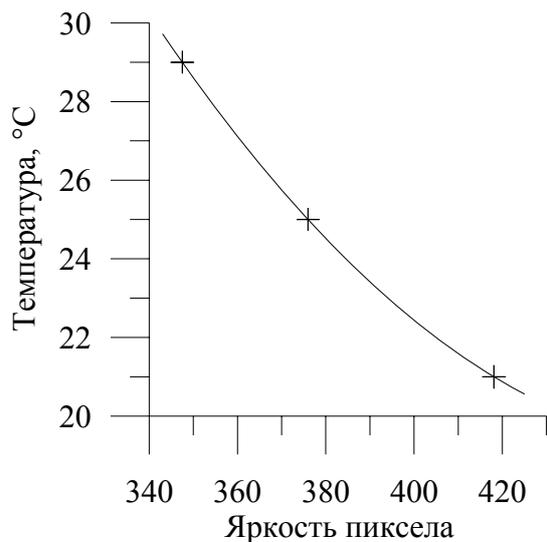


Рис. 3. Калибровочная кривая

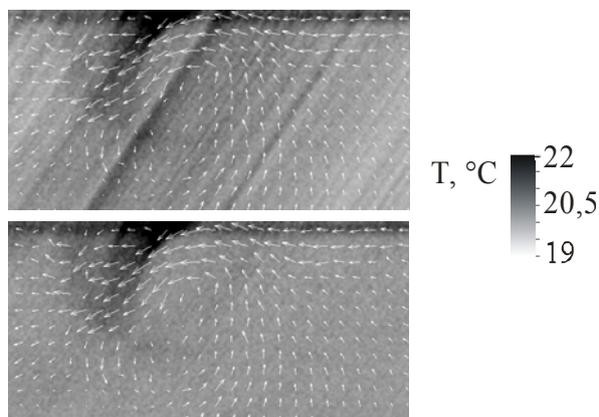


Рис. 4. Наложенные поля скорости и температуры без коррекции полос (сверху) и с коррекцией (снизу)

каждого установленного значения температуры снималась серия из 100 изображений, по которой рассчитывалось среднее изображение. Каждое такое изображение осредняется, и по полученному набору температур и соответствующих им яркостей методом наименьших квадратов строится калибровочная кривая (показана на рис. 3). Данная кривая дополняется калибровочными коэффициентами для каждой точки изображения, предназначенными для устранения эффекта неоднородной освещенности потока, и получаемыми отношением средней по изображению яркости к яркости в точке [9, 11]. Пример калибровочной кривой приведен на рис. 3, температурное разрешение составляет 8.8 градаций яркости на 1 °C.

Стандартный способ обработки мгновенных PLIF изображений потока включает два шага: выравнивание освещенности изображения умножением яркости в точке на соответствующий калибровочный коэффициент. Полученное изображение преобразовывается в поле температуры согласно калибровочной кривой. Обработка серии изображений, полученных при постоянной температуре потока, показала, что стандартное отклонение, рассматриваемое как погрешность измерений, составляет от 0.55 до 0.8 °C для различных областей изображения, из которых 0.2–0.27 °C могут быть

нанесенными маркерами. Камерами снимались изображения мишени, по которым рассчитывалось преобразование координат. Полученное преобразование применялось для приведения изображений с разных камер к общей системе координат (системе координат мишени). Используемые при этом процедуры обработки изображений исходно предназначены для измерения трехкомпонентных полей скорости методом Stereo-PIV [1] и входят в состав программного обеспечения использованной измерительной системы.

Второй этап эксперимента — построение зависимости яркости точки на изображении от температуры (калибровка PLIF камеры). Первоначально была получена серия изображений при отсутствии лазерного излучения (фоновые изображения), включающих в себя шум чтения камеры и возможную фоновую засветку. Среднее фоновое изображение вычитается из каждого изображения потока перед его дальнейшей обработкой. Далее выполнялась калибровка по набору изображений, полученных при нескольких постоянных температурах потока. Для снижения влияния нестабильности параметров лазерного излучения и шума камеры для

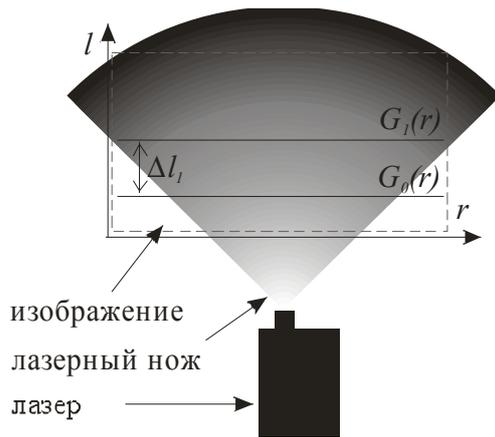


Рис. 5. Положение профилей интенсивности для коррекции полос

протяжении эксперимента температурой потока (опорная область). Эта область расположена в нижней части изображения и захватывает всю ширину лазерного ножа. Предложенный алгоритм обработки PLIF изображений включает в себя пять этапов. На первом этапе реконструкции поля температуры осуществляется коррекция нестабильности энергии импульса лазера, аналогичная описанной в [11]. Так как интенсивность излучения флуорофора пропорциональна энергии лазера (см. формулу 1), то среднее по опорной области значение яркости может рассматриваться как значение энергии импульса лазера. Значение в каждой точке изображения умножается на отношение средней в данной серии измерений яркости опорной области к яркости опорной области для данного изображения. Следующий шаг — выравнивание освещенности изображения умножением интенсивности в каждой точке на соответствующий калибровочный коэффициент. Для снижения влияния шума камеры к изображению применяется медианный, либо сглаживающий фильтр. Четвертый этап — коррекция упомянутых выше полос. Такие полосы являются прямыми линиями, сходящимися в точке фокуса рассеивающей луч лазера цилиндрической линзы. Для двух профилей интенсивности  $G_0(r)$  и  $G_1(r)$ , построенных в опорной области вдоль прямых, находящихся на расстоянии  $l$  и направленных поперек оси лазерного ножа (см. рис. 5), можно выбрать два числа  $\Delta r_1$  и  $c_1$ , такие что:

$$G_0(r) = G_1((r + \Delta r_1) \cdot c_1) \quad (2)$$

Параметры  $\Delta r_1$  и  $c_1$  характеризуют направление распространения и угол рассеяния лазерного ножа, и могут быть найдены определением минимума функции:

$$\phi_{G_0, G_1}(c, \Delta r) = \frac{1}{(r_1 - r_0)} \sum_{r=r_0}^{r_1} (G_0(r) - G_1((r + \Delta r) \cdot c))^2 \quad (3)$$

Опорный профиль  $G_0'(r)$  строится осреднением всех профилей в опорной области с учетом вычисленных на предыдущем этапе коэффициентов. Коррекция значения яркости в точке изображения выполняется умножением на отношение средней по опорному профилю интенсивности к интенсивности в соответствующей точке опорного профиля. Результат работы процедуры коррекции полос приведен на рис. 4. Полученное в результате изображение преобразовывается в поле температуры согласно калибровочной кривой.

отнесены на шум камеры. Разброс погрешности связан с неравномерной освещенностью потока и непостоянством модового состава лазерного излучения, что приводит к появлению на мгновенных полях температуры полос вдоль направления распространения лазерного ножа, интенсивность которых сопоставима с диапазоном измеряемых температур (см. рис. 4, сверху).

Для снижения погрешности измерений была предложена схема обработки, включающая коррекцию данных, на основе анализа присутствующей на изображениях области с неизменной на

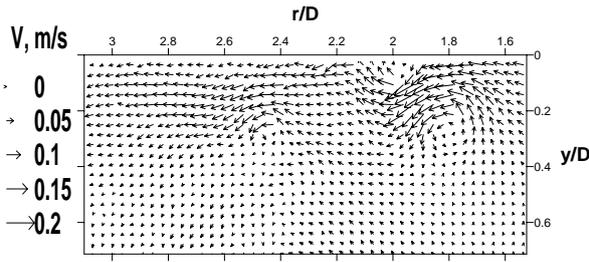


Рис. 6. Мгновенное поле скорости в области натекания струи

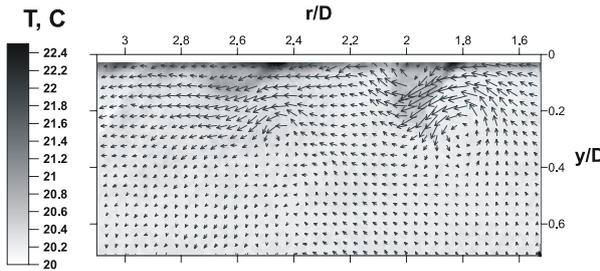


Рис. 7. Мгновенное поле температуры с наложенным полем скорости

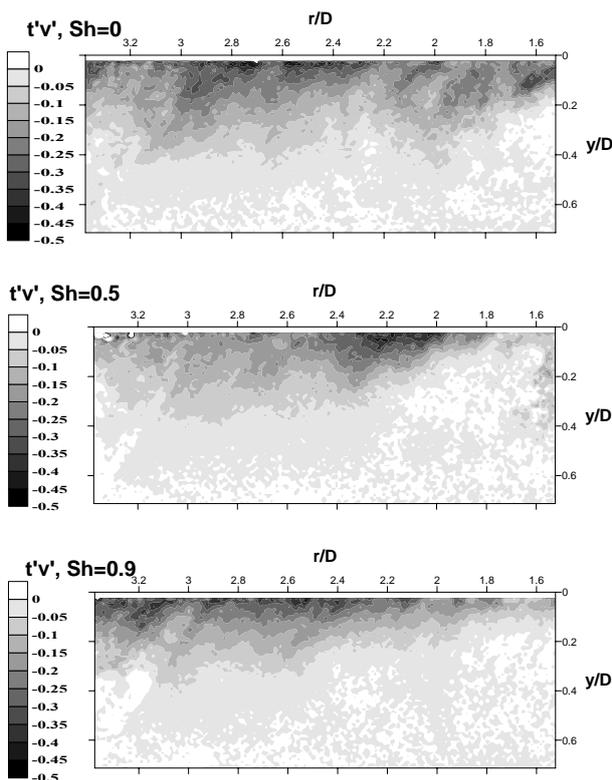


Рис. 8. Корреляции пульсаций температуры и пульсаций продольной компоненты скорости в области натекания струи при различных частотах возбуждения потока

Применение коррекции неустойчивости энергии лазерного излучения снижает погрешность измерений с  $0.55\text{--}0.8\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $0.24\text{--}0.45\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а при использовании коррекции полос — до  $0.24\text{--}0.37\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Для сравнения, в работе [4] при помощи двухцветного метода PLIF, в котором коррекция интенсивностей осуществляется по опорному сигналу второго красителя, нечувствительного к температуре, достигнута погрешность измерений  $0.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Снижение пространственного разрешения поля температуры позволит еще снизить погрешность за счет шума камеры. Разброс результирующей погрешности в зависимости от положения на изображении связан с неоднородной освещенностью потока (что приводит к различному вкладу шума камеры в сигнал для различных областей потока) и с погрешностью коррекции полос на изображении.

Для расчета полей скорости по трассерным картинкам потока применялся итерационный PIV алгоритм с деформацией расчетных областей [13], размер элементарной ячейки  $32 \times 32$  с перекрытием 75 %. Разрешение поля температуры снижалось до разрешения поля скорости осреднением по ячейкам  $8 \times 8$ .

**4. Результаты.** Измерения проводились для двух расстояний от среза сопла до импактной поверхности:  $h/D = 3$  и  $h/D = 6$ , где  $D$  — диаметр сопла. Число Рейнольдса составляло 4000, что соответствует среднерасходной скорости на срезе сопла  $0.27\text{ м/с}$ . Для каждого режима было измерено по 2000 мгновенных полей скорости и температуры, по которым рассчитывались статистические характеристики потока. Первый эксперимент проводился при  $h/D = 3$ . Измерительная область — область натекания потока на стенку, расстояние от оси сопла от  $r/D = 0.4$  до  $r/D = 3$ .

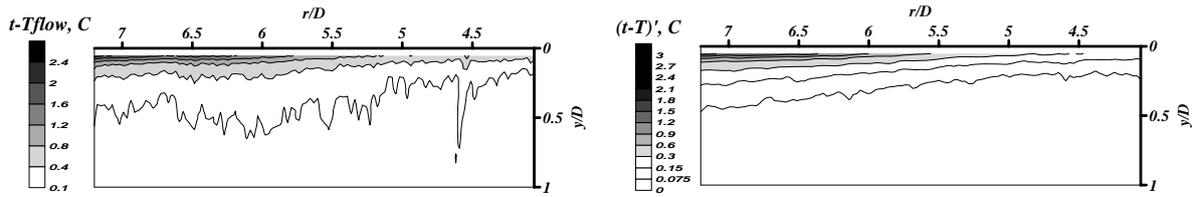


Рис. 9. Средняя относительная температура (слева) и пульсации температуры (справа)

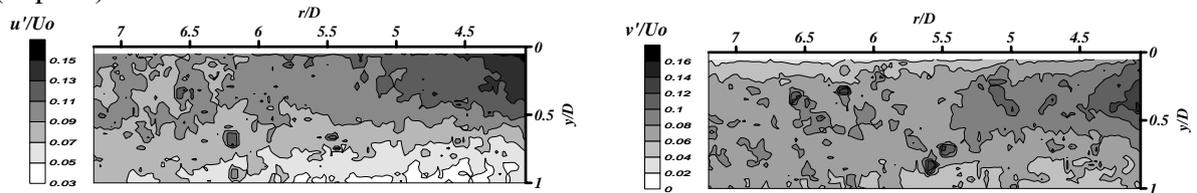


Рис. 10. Пульсации продольной (слева) и поперечной (справа) компонент скорости

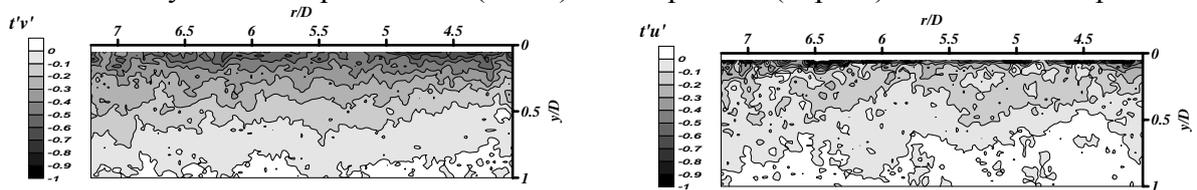


Рис. 11. Корреляции пульсаций температуры и пульсаций поперечной (слева) и продольной (справа) компоненты скорости

Нагревательный элемент выделял постоянную мощность  $Q = 3.3 \hat{A} \hat{O} / \hat{n} i^2$ . Было проведено три серии измерений при различных частотах внешнего возмущения потока, соответствующих числам Струхала  $Sh = 0$  (без возмущения),  $Sh = 0.5$  (9 Гц) и  $Sh = 0.9$  (17 Гц).

На рис. 6 представлено мгновенное поле скорости. Видно, что на расстоянии порядка двух калибров от оси сопла присутствует отрыв потока, индуцированный крупномасштабной вихревой структурой и направленный вглубь пограничного слоя. На мгновенных полях температуры (рис. 7) видны локальные выбросы тепла. Эти выбросы можно связать с наличием отрывных течений в пристенной области. Такой механизм уноса тепла описан в работе [10], в которой исследовался теплообмен в плоской струе методом PIV/PLIF. Наиболее интенсивный унос тепла в области критической точки наблюдался между крупными вихрями с противонаправленным вращением. В данном объекте такой механизм также присутствует в областях между основным (когерентным) вихрем и отрывным вихрем противоположного знака завихренности (см. рис. 7). На рис. 8 представлены корреляции пульсаций температуры с пульсациями нормальной к стенке компоненты скорости  $\langle t'v' \rangle$  при разных режимах возмущения. Значения корреляций здесь и далее нормированы на величину  $\rho \cdot C_p / Q$ , где  $\rho$  — плотность жидкости и  $C_p$  — теплоемкость. При отсутствии внешних возмущений потока ( $Sh = 0$ ) распределение корреляции прерывисто и с меньшими абсолютными значениями. При возмущении на частоте, соответствующей  $Sh = 0.5$ , в распределении присутствует выраженный максимум в области отрыва потока. При увеличении частоты возмущений до  $Sh = 0.9$  распределение корреляций становится более равномерным с утолщением слоя по мере удаления от оси сопла. Увеличение

абсолютных величин корреляций в случае с внешним возмущением означает усиление роли турбулентного механизма переноса тепла при внешнем возмущении потока.

Второй эксперимент проводился при  $h/D = 6$  калибров, положение измерительной области относительно оси сопла — от  $r/D = 4$  до  $r/D = 7$ . Поток тепла от нагревателя составлял  $4.4 \text{ Вт/см}^2$ . Выбор режима течения и области измерения обусловлен тем, что вдали от оси струи мы должны наблюдать более автомодельный поток, и можем зафиксировать тепловой пограничный слой, утолщающийся с увеличением расстояния от критической точки. В этой области влияние когерентных структур отсутствует, поэтому внешнее возмущение не использовалось, так как оно никак не скажется на характере течения.

На распределении средней относительной температуры (рис. 9) можно наблюдать утолщение теплового пограничного слоя по мере удаления от оси струи. То же следует из утолщения пульсационного температурного пограничного слоя. Пульсации продольной компоненты скорости  $u$  превышают пульсации поперечной компоненты  $v$  в пристенной области, но в остальной части струи они сравнимы по абсолютной величине (см. рис. 10). Однако корреляция  $\langle t'v' \rangle$  существенно интенсивнее корреляции в пристенной области (рис. 11), из этого следует, что вклад поперечной составляющей скорости в перенос тепла больше. Распределение корреляционных коэффициентов более равномерно во всей области, по сравнению с измерениями в области натекания (см. рис. 8). Во всей пристенной части струи корреляция отрицательная, то есть отрицательные пульсации как нормальной к стенке, так и продольной компонент скорости приводят к положительным потокам тепла. При этом абсолютное значение рассчитанных корреляционных коэффициентов показывает, что до 70 % тепла переносится за счет турбулентного механизма переноса. Стоит отметить, что это лишь оценка вклада турбулентного переноса. Оба метода измерений обладают погрешностью, и, кроме того, при расчете полей температуры и скорости происходит пространственное сглаживание измеряемых величин на размерах элементарной области измерения, что приводит к недооценке измеряемых величин. Область осреднения в несколько раз превышает колмогоровский масштаб турбулентности в потоке, поэтому свой вклад в корреляции вносят только крупномасштабные пульсации потока. Мелкомасштабные пульсации остаются неучтенными за счет пространственного осреднения.

**5. Заключение.** В рамках данной работы реализована методика PLIF для измерений мгновенных полей температуры в потоках жидкости. Разработанные алгоритмы обработки изображений позволяют компенсировать влияние нестабильности параметров лазерного излучения, а именно нестабильности энергии импульса и непостоянство распределения энергии по лучу, путем дополнительного анализа изображений. За счет применения алгоритмов коррекции удалось снизить погрешность измерений температуры с  $0.8 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $0.37 \text{ }^\circ\text{C}$ . Также реализована комбинация методов PIV и PLIF для одновременных измерений полей скорости и температуры потока в выбранном сечении потока.

Комбинация методов PIV/PLIF применена для исследования теплообмена в пристенной части осесимметричной турбулентной импактной струи, натекающей на нагреваемую поверхность. Анализ мгновенных полей температуры и скорости демонстрирует наличие когерентных структур и отрывов потока в области натекания струи. Осреднение по ансамблю мгновенных полей температуры показывает рост толщины температурного пограничного слоя по мере удаления от критической точки.

Рассчитаны корреляции пульсаций скорости и пульсаций температуры, характеризующие интенсивность турбулентного переноса тепла. Показано, что при различных частотах внешнего возмущения потока интенсивность турбулентного переноса в области натека струи на стенку различна. Во всей пристенной области корреляция отрицательная, то есть отрицательные пульсации как продольной, так и поперечной компонент скорости приводят к положительным пульсациям температуры. При этом вклад в турбулентный перенос тепла нормальной к стенке компоненты скорости выше.

### Список литературы

- [1] Alekseenko S.V., Bilsky A.V., Dulin V.M., Markovich D.M., Tokarev M.P. Stereo PIV measurements of turbulence characteristics in axisymmetric jet // Submitted to Experiments in Fluids. 2008.
- [2] Coppeta J., Rogers C. Dual emission laser induced fluorescence for direct planar scalar behaviour measurements // Experiments in Fluids. 1998. № 25. 1–15.
- [3] Didden N., Ho C.-M. Unsteady separation of a boundary layer produced by an impinging jet // Journal of Fluid Mechanics. 1985. V. 160. P. 235–256.
- [4] Funatani S., Fujisawa N., Ikeda H. Simultaneous measurement of temperature and velocity using two-colour LIF combined with PIV with a colour CCD camera and its application to the turbulent buoyant plume // Measurement Science and Technology. 2004. № 15. P. 983–990.
- [5] Hishida K., Sakakibara J. Combined planar laser-induced fluorescence—particle image velocimetry technique for velocity and temperature fields // Experiments in Fluids. 2000. № 29. P. 129–140.
- [6] Liu T., Sullivan J.P. Heat transfer and flow structures in an excited circular impinging jet // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39. № 17. P. 3695–3706.
- [7] Phares D.J., Smedley G.T., Flagan R.C. The inviscid impingement of a jet with arbitrary velocity profile // Physics of Fluids. 2000. V. 12. № 8. P. 2046–2055.
- [8] Raffel M., Willert C., Kompenhans J. Particle Image Fluorescence. A practical guide. Berlin: Springer. 1998.
- [9] Sakakibara J., Hishida K., Maeda M. Measurements of thermally stratified pipe flow using image-processing techniques // Experiments in Fluids. 1993. № 16. P. 82–96.
- [10] Sakakibara J., Hishida K., Maeda M. Vortex structure and heat transfer in the stagnation region of an impinging plane jet (simultaneous measurements of velocity and temperature fields by digital particle image velocimetry and laser-induced fluorescence) // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1997. V. 40. № 13. P. 3163–3176.
- [11] Seuntjens H.J., Kieft R.N., Rindt C.C.M., Steenhoven A.A. van 2D temperature measurements in the wake of heated cylinder using LIF // Experiments in Fluids. 2001. № 31. P. 588–595.
- [12] Алексеенко С.В, Бильский А.В., Маркович Д.М. Применение метода цифровой трассерной визуализации для анализа турбулентных потоков с периодической составляющей // Приборы и техника эксперимента. 2004. № 5. С. 145–153.
- [13] Токарев М.П., Маркович Д.М., Бильский А.В. Адаптивные алгоритмы обработки изображений частиц для расчета мгновенных полей скорости // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. № 3. С. 109–131.