

УДК 532

## ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

**В. Д. Тютюма**

*Лаборатория термогидродинамики, Институт тепло- и массообмена им А.В. Лыкова Национальной  
академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

**Введение.** По мере накопления теоретических и экспериментальных данных по исследованию взаимосвязанных задач гидроаэродинамики, акустики и теплообмена все более отчетливо на повестку дня начинают выступать вопросы концептуального плана. Становится ясным, что многие задачи в своей основе не могут быть решены на основе существующих концепций взаимовлияния гидродинамических, тепловых и акустических процессов. Впервые наиболее актуально эта проблема начала проявляться в нелинейной акустике, где для решения проблемы дисперсии и аномального поглощения звука потребовалось привлечение новых подходов с учетом неравновесных процессов на молекулярном уровне [1, 2].

Однако проблема взаимовлияния механических, тепловых и акустических процессов актуальна не только для акустики, но и для всей аэродинамики в целом. Подробное описание распределения термогидродинамических параметров реальных течений вряд ли возможно без детального учета механических, тепловых и акустических взаимодействий в потоке. На современном этапе развития гидродинамики уже нельзя полагать, что все многообразие гидродинамических процессов, происходящих даже при небольших числах Маха, можно втиснуть в рамки модели течения несжимаемой жидкости. Еще Дж. Рэлей [3], а позже Г. Шлихтинг [4] показали роль звуковых волн в формировании вторичных вихревых течений. Бурное развитие нелинейной акустики [1, 5, 6] убедительно продемонстрировало тесную связь между распространяющимися акустическими волнами и возникающими при этом гидродинамическими течениями и необходимость учета их взаимного влияния друг на друга.

Несмотря на это в гидродинамике традиционно описание движения вязкой теплопроводной среды строится без учета взаимного влияния термогидродинамических и акустических процессов. Недооценка роли акустических возмущений в формировании структуры течения вязких жидкостей ограничивает возможности

существующих моделей течения вязкой теплопроводной среды. Косвенно это проявляется в том, что в них не в полной мере используются практический опыт, идеи и достижения, накопленные в газовой динамике идеального газа. Поэтому, обладая большой общностью описания, они все же лишены возможности в деталях учитывать все нюансы гидродинамических и термодинамических процессов, которые для своего описания требуют дополнительных ограничений не связанных с законами сохранения импульса, массы и энергии. Математическая замкнутость системы дифференциальных уравнений вязкого газа сама по себе еще не может служить гарантией адекватного описания реальных физических процессов, если они не заложены в основу их физической и математической модели.

Уязвимое место существующей теории течения вязкого теплопроводящего газа заключается в том, что в ней заранее не оговаривается термодинамический процесс сжатия среды. Преобразование тепла в механическую энергию ставится в зависимость от условий решаемой задачи, внося тем самым элемент случайности и некоторой неоднозначности в поведение гидродинамической системы. В этом описание движения вязкой теплопроводящей среды кардинальным образом отличается от теории течения идеального газа, где поток считается изэнтропическим и, следовательно, термогидродинамический процесс сжатия среды указывается заранее.

В настоящей работе на основе анализа механизма формирования давления в потоке жидкости предложена математическая модель течения вязкой, теплопроводной среды, в которой в определенной степени учитывается взаимосвязь не только механических, тепловых, но и акустических процессов.

**1. Особенности проявления внутренних взаимодействий в потоке сжимаемой жидкой среды.** В динамике сплошных сред принято выделять два класса действующих на частицы сил: объемные и поверхностные. Различие в проявлении этих сил состоит не только в том, что объемные силы действуют непосредственно на элементы объема, а поверхностные приложены к элементам поверхности. Эти силы существенно различаются и по механизму передачи их действия в процессе изменения самих сил. Если изменение объемных сил сказывается мгновенно на каждой движущейся частице, то возмущения давления распространяются в виде акустических волн с конечной скоростью звука, и передаются удаленным частицам только по прошествии некоторого промежутка времени. При этом необходимо считаться с тем фактом, что перераспределение давления в потоке происходит в результате нелинейного

взаимодействия огромного числа акустических волн распространяющихся в движущейся среде.

Несмотря на то, что еще Б. Риман указал на решающую роль нелинейных акустических взаимодействий в процессе образования ударных волн [7, 8], до настоящего времени значение этого фундаментального механизма в формировании структуры течения жидкости остается не до конца осознанным. В том, что акустические возмущения играют существенную роль в формировании распределения давления в потоке можно убедиться на простом примере.

Речь идет о различии в поведении двух сжатых объемов газа, один из которых в начальный момент локализован в открытом пространстве, а другой находится в области критической точки движущегося с дозвуковой скоростью тела. В первом случае начавшийся разлет газообразной среды сопровождается образованием ударного сжатого слоя, распространяющегося в разные стороны со сверхзвуковой скоростью. Во втором случае, практически такой же объем сжатого газа около критической точки, несмотря на открытое впереди пространство, движется вместе с обтекаемым телом, скорость которого намного меньше скорости звука. Очевидно, что если мысленно мгновенно убрать тело и заполнить образовавшуюся пустоту газом, то тотчас же образуется распространяющаяся во все стороны со сверхзвуковой скоростью ударная волна. Почему фактически один и тот же сжатый объем газа проявляет такие разные свойства? Почему в одном случае он образует ударную волну, а в другом случае, при, казалось бы, более выгодных условиях открытости впереди пространства и наличия с тыльной стороны твердой поверхности лобовой части движущегося с дозвуковой скоростью тела ударная волна не возникает? В чем состоит физический механизм этих двух так не похожих друг на друга явлений, происходящих, по сути, с одним и тем же объемом сжатого газа?

Такое парадоксальное поведения среды становится вполне объяснимым, если принять во внимание, что и в первом и во втором случае эволюция области сжатия является следствием взаимодействия малых возмущений в виде акустических волн, порождаемых неоднородностью распределения гидродинамических параметров в пространстве. Выражаясь языком оптики, и в том и другом случае мы наблюдаем интерференционную картину, возникающую в результате наложения огромного числа акустических волн. Это дает основание утверждать, что распределение давления в различных точках движущегося потока имеет волновую природу и формируется в результате взаимодействия проходящих через эти точки огромного числа акустических

волн, так как другого механизма передачи возмущений плотности или давления в пространстве помимо этого (если не учитывать объемные силы) не существует.

В газовой динамике идеального газа теплопроводностью пренебрегают, и течение считают изэнтропическим. Если принять во внимание доминирующее влияние акустических возмущений на формирование распределения давления в потоке, то становится ясным, что изэнтропичность течения идеального газа обусловлена не столько низкой теплопроводностью газов, сколько в большей степени обязана самому механизму сжатия посредством акустических волн, которые, как известно [1, 8], распространяются адиабатически. Если бы распространение малых возмущений носило неизэнтропический характер как, например, это имеет место для ударных волн конечной интенсивности, то вряд ли низкая теплопроводность газов имела бы решающее значение при определении термодинамического процесса сжатия идеального газа. Отсутствие теплопроводности в большей мере сказывается на том, что две различные частицы движущейся среды связаны между собой одной и той же адиабатой, чего нельзя уже сказать о частицах движущихся в теплопроводной среде. Таким образом, термодинамический процесс сжатия среды, независимо от наличия или отсутствия теплопроводности, определяется, в основном, характером распространения малых возмущений давления в данной среде. В обычных условиях он является адиабатическим. Это значит, что при движении вязкой теплопроводной среды процесс сжатия, как и в случае идеального газа, следует признать адиабатическим. При этом подведенное к движущимся частицам вязкой жидкости внешнее тепло не преобразуется непосредственно в механическую работу, а уходит только на изменение внутренней энергии. На первый взгляд это противоречит первому началу термодинамики. Но не следует забывать, что при движении вязкой сжимаемой жидкости мы имеем дело с неравновесными процессами передачи тепла и сжатия среды, каждый из которых имеет свое характерное время. Поскольку сжатие на акустической волне осуществляется достаточно быстро, то медленный процесс подвода тепла не успевает за процессом сжатия и все тепло уходит только на изменение внутренней энергии. Конечно, это не значит, что в потоке теплопроводной жидкости подведенное тепло вообще не преобразуется в механическую энергию, но такое преобразование осуществляется только в результате увеличения внутренней энергии движущейся среды.

**2. Система уравнений движения, неразрывности и энергии с учетом волнового механизма внутренних взаимодействий в движущейся среде.** В основу

описания движения вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости положены дифференциальные уравнения Навье-Стокса, неразрывности и энергии, которые в прямоугольной декартовой системе координат записываются следующим образом [2, 8, 9]:

$$\rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_s}{\partial x_s} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial V_s}{\partial x_s} \right) + \rho F_i; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0; \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla(\lambda \nabla T) + \frac{dp}{dt} + \rho q + 2\mu \dot{\gamma}^2 - \left( \frac{2}{3} \mu - \zeta \right) (\nabla \bar{V})^2. \quad (3)$$

Соотношения (1) – (3) выражают в дифференциальной форме фундаментальные законы изменения импульса, сохранения массы и полной энергии движущегося индивидуального объема сплошной среды. Совместно с уравнением состояния, которое для совершенного газа определяется уравнением Менделеева – Клапейрона

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

уравнения (1)–(3) образуют замкнутую систему, решая которую при граничных условиях прилипания на твердых поверхностях и соответствующих начальных условиях можно определить гидродинамические и термодинамические параметры движущегося потока.

В общем случае коэффициенты вязкости  $\mu$  и  $\zeta$ , входящие в систему уравнений(1)–(3), являются функциями термодинамических параметров, а в диспергирующих средах зависят еще и от частоты колебаний акустических волн.

Учитывая доминирующее влияние акустических возмущений на формирование распределения давления в потоке, можно принять, что в каждой точке движущейся среды бесконечно малые приращения давления и плотности должны быть связаны условием распространения акустических волн [3, 5, 7]

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2, \quad (5)$$

где скорость звука  $c$  – заданная функция в общем случае не только термодинамических параметров среды (температуры и плотности), но в диспергирующих средах еще и функция частоты.

С помощью соотношения (5) можно исключить давление из системы уравнений (1)-(3) и записать ее в виде

$$\rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) = -c^2 \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_s}{\partial x_s} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial V_s}{\partial x_s} \right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0; \quad (7)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla(\lambda \nabla T) + c^2 \frac{dp}{dt} + \rho q + 2\mu \dot{S}^2 - \left( \frac{2}{3} \mu - \zeta \right) (\nabla \bar{V})^2. \quad (8)$$

Таким образом, мы получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно скорости, плотности и температуры. Кроме коэффициентов вязкости она дополнительно содержит физический параметр – скорость звука. Поскольку плотность и температура в каждой точке движущегося потока определяются в процессе решения, то для определения давления служит уравнение состояния (5). Эта система уравнений по сравнению с системой (1) – (3) в большей мере учитывает особенности влияния акустических возмущений на формирование структуры течения вязкой теплопроводной жидкости.

При небольшой скорости движения среды когда изменение температуры пренебрежимо мало система уравнений (6) – (8) преобразуется в уравнения акустики движущейся среды [1, 3]. Если же пренебречь вязкостью и теплопроводностью, то они переходят в систему уравнений движения идеального газа [7, 8].

**Заключение.** Рассмотренные выше особенности внутренних взаимодействий в движущемся потоке относятся к случаю, когда влияние объемных сил на движение жидкости пренебрежимо мало. Это возможно только в том случае, когда объемные силы уравновешиваются силами давления, и ускорение жидких частиц в потоке происходит преимущественно за счет сил внутренних взаимодействий. Как известно [9], общее ограничение, накладываемое на класс сил, под действием которых возможно равновесие жидкости или газа, выражается условием:

$$\bar{F} \cdot \text{rot} \bar{F} = 0.$$

Воспользовавшись принципом независимости действия сил, в этом случае мы можем исключить внешние силы, представив давление в потоке в виде двух составляющих, одна из которых уравновешивает внешние силы, а другая – определяется из решения системы уравнений (5) – (8).

В случае, когда ускорение потока вызвано большей частью внешними объемными силами или если ускорение потока жидкости за счет объемных сил и внутренних взаимодействий соизмеримы, то вопрос о применимости рассмотренного выше подхода к описанию движения жидкости является проблематичным. В этом случае целесообразно все же использовать уравнения (1) – (3).

В заключение следует отметить, что окончательно вопрос о том насколько система уравнений (5) – (8) полно и адекватно отражает реальные физические процессы в потоках вязкой теплопроводной жидкости, может быть установлен только путем сравнения теоретических результатов с экспериментом. Однако косвенным подтверждением правильности рассмотренной модели течения вязких сред может служить опыт практического использования уравнений газовой динамики идеального газа. Хорошее совпадение теоретических результатов на основе изэнтропических формул с экспериментальными данными, проводимыми в реальных условиях, дают уверенность в возможности применения рассмотренного выше подхода и к описанию течения вязкого теплопроводного газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф07–052)

### Литература

1. Зарембо Л. К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Релей (Дж. Стретт). Теория звука, т. 2. М.: Гостехиздат, 1955г. 475 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974., 712с.
5. Руденко О.Б., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
6. Ниборг В. Акустические течения. / В кн.: Физическая акустика / Под ред. Мэзона У. Т. 2, ч. Б. М.: Мир, 1969. С. 302–377.
7. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 855 с.
8. Черный Г.Г. Газовая динамика. М: Наука, 1988. 424 с.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904с.