

**КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, НАГРЕВАЕМОМ КРУГОВЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ
ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА.**

В.А. Пинскер

ОАО НПО «Буровая техника» – ВНИИБТ, Москва, Россия , e-mail : v.pinsker@vniibt.ru

АННОТАЦИЯ

В замкнутом интегральном виде получено точное аналитическое решение одной из классических задач несвязанной термоупругости. Рассмотрены важные частные случаи, при которых компоненты тензора напряжений принимают более простой вид. Исследованы асимптотики найденных решений при малых и больших значениях безразмерного времени, вблизи и вдали от источника тепла. В явном виде построены приближенные распределения осевой и сдвиговой компонент в начале нагрева. Обнаружены неочевидные свойства пространственной инверсии термических напряжений. Найдены максимальные значения всех компонент термоупругого поля при различных значениях коэффициента Пуассона. Показано, что при стационарном режиме в нагреваемом полупространстве возможны только сжимающие напряжения. Определен деформационный профиль свободной границы. Исследована возможность механических разрушений в нагреваемом полупространстве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что поверхностный нагрев твердых упругих тел приводит к возникновению в них нестационарных температурных полей, что в свою очередь вызывает появление термических напряжений, также развивающихся во времени. Анализ и описание термонапряженного состояния таких тел является важной и актуальной научной проблемой и представляет значительный интерес для различных областей техники и технологии.

Во многих реальных случаях тепловой поток, постоянно действующий на участок поверхности полуограниченного тела можно представить в виде тонкого кругового источника тепла с равномерным распределением интенсивности. Такие источники формируются на поверхности твердых тел в процессе индукционного нагрева а также при воздействии лазерных или электронных пучков.

В работе рассматривается нестационарная осесимметричная задача о несвязанных полях термических напряжений в однородном и изотропном линейно-упругом полупространстве, нагреваемом непрерывным тепловым потоком постоянной интенсивности q , равномерно распределенным внутри круговой области радиуса R на поверхности тела. Граница полупространства свободна от нормальных и касательных напряжений и теплоизолирована вне нагреваемой области.

2. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

Введем цилиндрическую систему координат Ozr , где радиальная ось r лежит на поверхности тела, вертикальная ось z перпендикулярна к ней и направлена вглубь полупространства, а начало координат (точка O) совпадает с геометрическим центром кругового источника тепла, начинающего действовать в момент времени $t = 0$. Полная мощность нагрева составляет величину $Q = \pi R^2 q$. Теплофизические и упругие характеристики среды считаем не зависящими от температуры.

Краевая задача для нестационарного температурного поля $T(r, z, t)$ в нагреваемом полупространстве с граничным условием второго рода запишется в следующем виде:

$$a\Delta T = T_{,t} \quad (r \geq 0, z \geq 0, t > 0), \quad -kT_{,z} \Big|_{z=0} = qH(t)H(r-R)$$
$$T(r, z, 0) = T(\infty, z, t) = T(r, \infty, t) = T_{,r}(0, z, t) = 0. \quad (1)$$

Для удобства введем безразмерные переменные: $x = z/R$, $\rho = r/R$, $\tau = at/R^2$, $\theta(\rho, x, \tau) = kT(r, z, t)/qR$.

Точное аналитическое решение поставленной двумерной параболической задачи математической физики, полученное в монографии [1] и наиболее полно исследованное в работе [2], имеет вид:

$$\theta(\rho, x, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) J_1(\lambda) \left[e^{-\lambda x} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \lambda\sqrt{\tau}\right) - e^{\lambda x} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + \lambda\sqrt{\tau}\right) \right] \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2)$$

В общем случае этот несобственный интеграл не выражается через элементарные и специальные функции и его необходимо рассчитывать численно. В замкнутом виде удастся найти распределение температуры лишь на оси симметрии [1]:

$$\theta(0, x, \tau) = 2\sqrt{\tau/\pi} \exp(-x^2/4\tau) \left(1 - \exp(-1/4\tau) + \sqrt{x^2 + 1} \operatorname{erfc}(\sqrt{x^2 + 1}/2\sqrt{\tau}) - x \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{\tau}) \right), \quad (3)$$

а также на краю нагреваемой области $r = R$, $z = 0$ и в установившемся тепловом режиме при $t \rightarrow \infty$ [2].

3. ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА

Перейдем к рассмотрению соответствующей квазистатической задачи термоупругости, подробная постановка которой приведена в [4], а метод решения изложен в [5]. Сначала определим потенциал перемещений Гудьера Φ , который будет удовлетворять равенству $\Delta\Phi = \theta$. Частное решение этого уравнения Пуассона находим в соответствии с известным алгоритмом [3]. Однако напряжения, соответствующие потенциалу Φ не удовлетворяют заданным нулевым граничным условиям на свободной поверхности. Следовательно, к полученным выражениям необходимо добавить компоненты "бестемпературного" поля напряжений, получаемого из решения системы однородных уравнений линейной теории упругости с помощью бигармонической функции Лява для полупространства. В результате находим точные формулы для всех безразмерных составляющих термоупругого поля σ_{ij} в интегральном виде. Они приведены в работе [5]. Там же рассчитаны наибольшие значения каждой из компонент,

координаты и моменты достижения максимумов напряжений применительно к оценке возможности развития механических разрушений в нагреваемом теле. Размерные напряжения p_{ij} можно определить путем умножения соответствующих величин σ_{ij} на масштабный коэффициент $A = E\alpha qR/2k$.

Так как рассматриваемая задача является осесимметричной, то отличными от нуля будут лишь четыре компоненты тензора σ_{ij} – радиальная $\sigma_{\rho\rho}$, сдвиговая $\sigma_{\rho x}$, окружная $\sigma_{\phi\phi}$, и осевая σ_{xx} . Из уравнений равновесия следует, что при $\rho = 0$ будут выполняться соотношения $\sigma_{\rho\rho}(0,x,\tau) = \sigma_{\phi\phi}(0,x,\tau)$ и $\sigma_{\rho x}(0,x,\tau) = 0$. Кроме того, можно строго доказать, что для напряжений $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\phi\phi}$ и σ_{xx} ось симметрии является линией экстремумов.

Что касается осевой и сдвиговой компонент, то обе они исчезают при $\tau \rightarrow \infty$, а их зависимость от коэффициента Пуассона в нестационарном режиме определяется масштабным множителем $1/(1-\nu)$.

4. АНАЛИЗ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

4.1 Осевое напряжение

Величина σ_{xx} может принимать как положительные так и отрицательные значения и обращается в нуль на свободной поверхности. Общая интегральная формула для $\sigma_{xx}(\rho,x,\tau)$, приведенная в [5] также позволяет найти явное асимптотическое выражение, справедливое при малых временах нагрева [6]:

$$\sigma_{xx}(\rho, x, +0) = \frac{\tau}{1-\nu} \frac{2x^2}{\pi\rho [x^2 + (\rho-1)^2]^{3/2} [x^2 + (\rho+1)^2]} \{ (x^2 + \rho^2 - 1)\mathbf{K}(m) + \left[\frac{16\rho(1-\rho)}{x^2 + (\rho-1)^2} - x^2 - (\rho+1)^2 + 8 \right] \mathbf{E}(m) \}, \quad (4)$$

где аргумент $m = 2\sqrt{\rho}/\sqrt{x^2 + (\rho+1)^2}$. Заметим, что функция $\sigma_{xx}(\rho,x,+0)$ является бигармонической, соответствующее поле изобар приведено на Рис.1, а выражение (4) упрощается в двух случаях:

1) На оси симметрии $\sigma_{xx}(0, x, +0) = \frac{\tau}{1-\nu} \frac{6x^2}{(x^2 + 1)^{5/2}}$

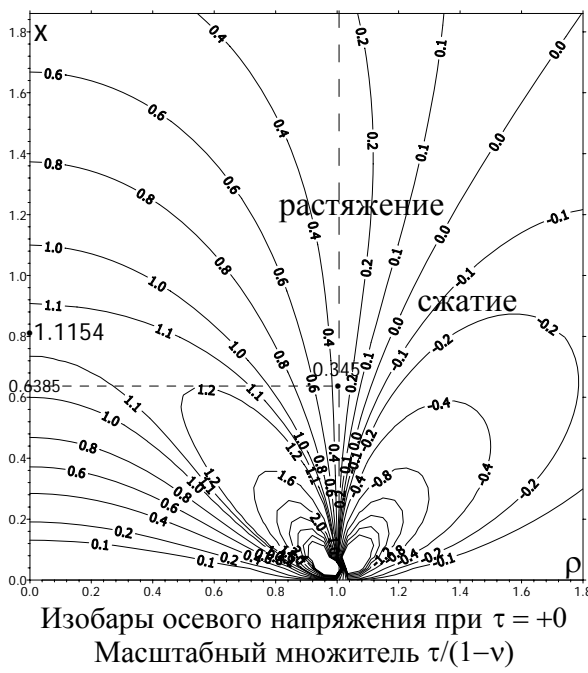
Здесь имеет место только осевое растяжение (см. Рис.4), а максимум достигается на глубине $x = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$ и составляет величину $\sigma_{xx} \approx 1.1154\tau/(1-\nu)$.

2) На цилиндрической поверхности $\rho = 1$:

$$\sigma_{xx}(1, x, +0) = \frac{\tau}{1-\nu} \frac{2}{\pi(x^2 + 4)^{3/2}} \left[x^2 \mathbf{K}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) - (x^2 - 4) \mathbf{E}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) \right].$$

Здесь также $\sigma_{xx} > 0$, максимум достигается на глубине $x = 0.6385$ и составляет величину $\sigma_{xx} \approx 0.345\tau/(1-\nu)$, а на краю зоны нагрева $\sigma_{xx}(1,0,\tau \ll 1) = \tau/\pi(1-\nu) \approx 0.318\tau/(1-\nu)$. Заметим, что в этой точке нулевое граничное условие не выполняется (см. Рис.4), так как при разложении компоненты $\sigma_{xx}(\rho,x,\tau)$ в ряд по τ мы пренебрегли членами порядка $\exp\{-[x^2 + (\rho-1)^2]/4\tau\}$.

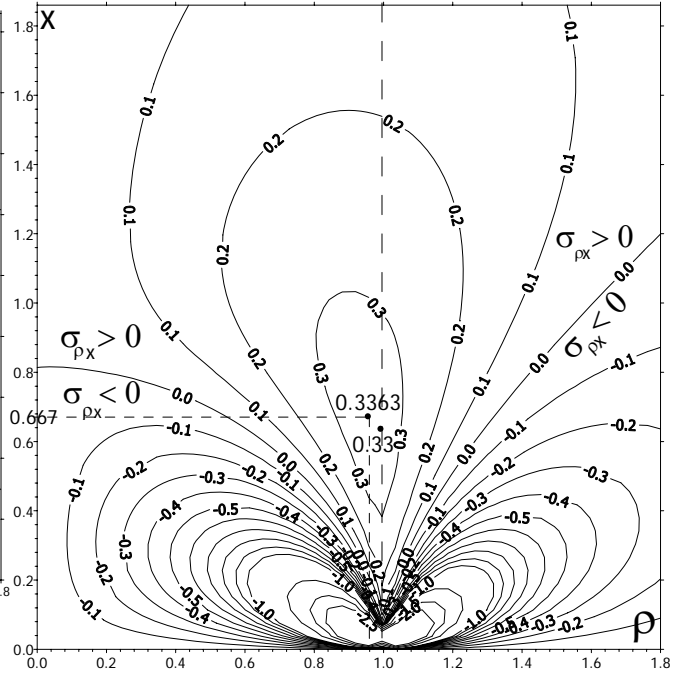
Распределение осевого напряжения у края зоны нагрева в начальный момент времени напоминает диполь. Далее, по мере роста τ величина максимума σ_{xx} монотонно возрастает, тогда как сама точка максимального растяжения постепенно удаляется от свободной поверхности и приближается к оси симметрии, а при $\tau = 0.0068$ скачком перемещается из положения $\rho = 0.66, x = 0.426$ в точку $\rho = 0, x = 0.8053$ (при этом $\sigma_{xx} = 0.013$), и в дальнейшем движется только вдоль этой оси, сначала приближаясь к свободной поверхности (до момента $\tau = 0.019$, при котором $x = 0.8014$, $\sigma_{xx} = 0.0314$), а затем удаляясь от нее. Это показано на Рис.3



$$\sigma_{xx}(0, 0.8165, +0) = 1.1154\tau/(1-\nu)$$

$$\sigma_{xx}(1, 0.6385, +0) = 0.345\tau/(1-\nu)$$

Рис.1



$$\sigma_{\rho x}(0, 0.8165, +0) = 0.3363\tau/(1-\nu)$$

$$\sigma_{\rho x}(1, 0.6385, +0) = 0.3363\tau/(1-\nu)$$

Рис.2

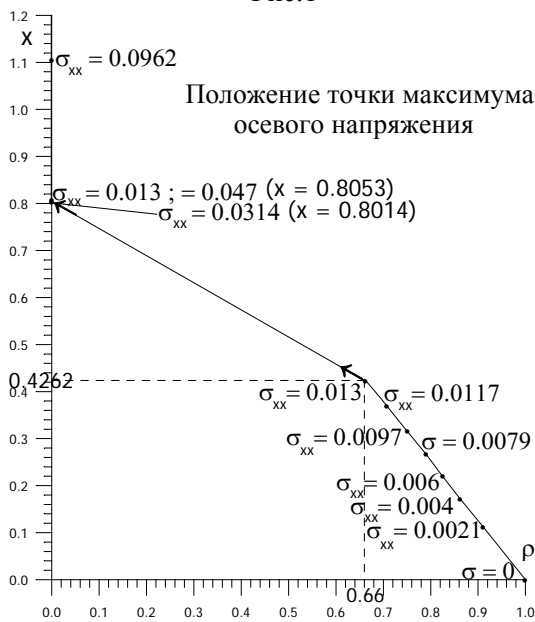


Рис. 3

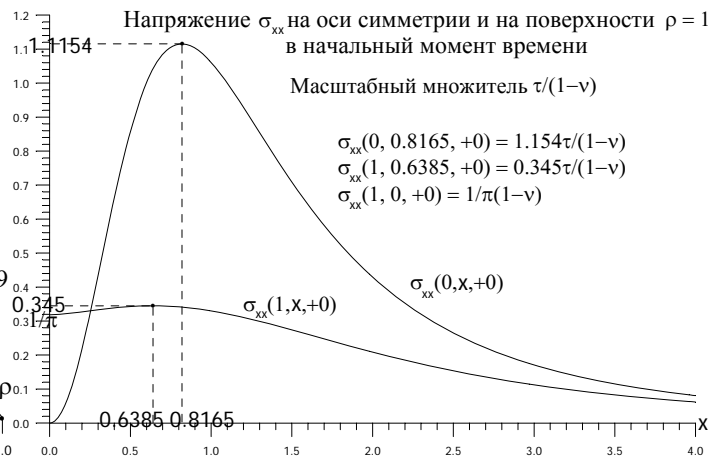


Рис. 4

4.2. Напряжение сдвига

Величина $\sigma_{\rho x}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения и обращается в нуль на свободной поверхности и на оси симметрии. Заметим, что общая формула компоненты сдвига в работе [5] обладает свойством радиальной инверсии относительно цилиндрической поверхности $\rho = 1$.

$$\sigma_{\rho x}(\rho, x, \tau) = \sigma_{\rho x}(1/\rho, x/\rho, \tau/\rho^2). \quad (5)$$

Таким образом, для полного анализа достаточно рассмотреть значения $\sigma_{\rho x}$ лишь в интервале $0 < \rho \leq 1$. Кроме того, используя дифференциальную форму записи соотношения (5) можно строго доказать, что абсолютные экстремумы функции $\sigma_{\rho x}(\rho, x, \tau)$ будут достигаться только при $\rho = 1$.

Общая интегральная формула для $\sigma_{\rho x}(\rho, x, \tau)$ также позволяет найти явное асимптотическое выражение, справедливое при малых временах нагрева [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho x}(\rho, x, +0) = & \frac{\tau}{1-\nu} \frac{2x}{\pi \rho [x^2 + (\rho-1)^2] \sqrt{x^2 + (\rho+1)^2}} \left\{ [x^2 + 2(\rho-1)^2 + \frac{2x^2}{x^2 + (\rho+1)^2}] \mathbf{K}(m) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{16x^2 \rho^2}{[x^2 + (\rho-1)^2][x^2 + (\rho+1)^2]} - x^2 - 2\rho^2 - 2 \right] \mathbf{E}(m) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Соответствующая картина приведена на Рис. 2. В частности, на цилиндрической поверхности $\rho = 1$

$$\sigma_{\rho x}(1, x, +0) = \frac{\tau}{1-\nu} \frac{2x}{\pi (x^2 + 4)^{3/2}} \left[(x^2 + 6) \mathbf{K}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) - (x^2 + 8) \mathbf{E}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) \right].$$

Здесь сдвиговая компонента всегда положительна и достигает максимального значения равного $0.33\tau/(1-\nu)$ на глубине $x = 0.6385$.

Изобара $\sigma_{\rho x} = 0$ в начальный момент времени состоит из двух ветвей: 1) Конечной – она начинается на оси симметрии в точке $x = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$ и заканчивается на краю зоны нагрева; эта ветвь напоминает четверть эллипса; 2) Бесконечной – она начинается на краю зоны нагрева, стремится к асимптоте $x = \sqrt{2/3} \rho$ и напоминает гиперболу.

4.3 Радиальное напряжение

Компонента $\sigma_{\rho\rho}$ на свободной поверхности всегда отрицательна и ее распределение в начале нагрева имеет вид плоской ступеньки: $\sigma_{\rho\rho}(\rho, 0, \tau \ll 1) = \sigma_{\phi\phi}(\rho, 0, \tau \ll 1) \approx -4\sqrt{\tau} H(1-\rho)/\sqrt{\pi(1-\nu)}$, что совпадает с точным решением задачи об одномерном нагреве полупространства постоянным тепловым потоком (см. Рис.5).

Приведем здесь полученные в явном виде [4] значения радиального и окружного напряжений в начале координат и на краю нагреваемой области:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(0, 0, \tau) = \sigma_{\phi\phi}(0, 0, \tau) = \\ = -2\sqrt{\tau/\pi} [1 - \exp(-1/4\tau)] - \operatorname{erfc}(1/2\sqrt{\tau}) - 2(1+\nu) [1/\sqrt{\pi\tau} - \operatorname{erf}(1/2\sqrt{\tau})]/(1-\nu). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что это равномерное двустороннее сжатие, монотонно возрастающее с течением времени тем быстрее, чем больше величина коэффициента Пуассона. В каждый момент времени максимальное сжимающее напряжение достигается в центральной точке. При $\tau \rightarrow \infty$ $\sigma_{\rho\rho}(0, 0, \infty) = \sigma_{\phi\phi}(0, 0, \infty) = -1$.

Для малых и больших τ формула (7) упрощается:

$$\sigma_{\rho\rho}(0,0,\tau \ll 1) = \sigma_{\varphi\varphi}(0,0,\tau \ll 1) \approx -4\sqrt{\tau/\pi}/(1-\nu) + 2(1+\nu)\tau/(1-\nu) - 8\nu\tau^{3/2} \exp(-1/4\tau)/\sqrt{\pi}(1-\nu) + ;$$

$$\sigma_{\rho\rho}(0,0,\tau \gg 1) = \sigma_{\varphi\varphi}(0,0,\tau \gg 1) \approx -1 + (1-2\nu)/3\sqrt{\pi\tau}(1-\nu) - (1-4\nu)/120\sqrt{\pi\tau^{3/2}}(1-\nu) + \dots$$

На краю нагреваемой области радиальное напряжение имеет вид:

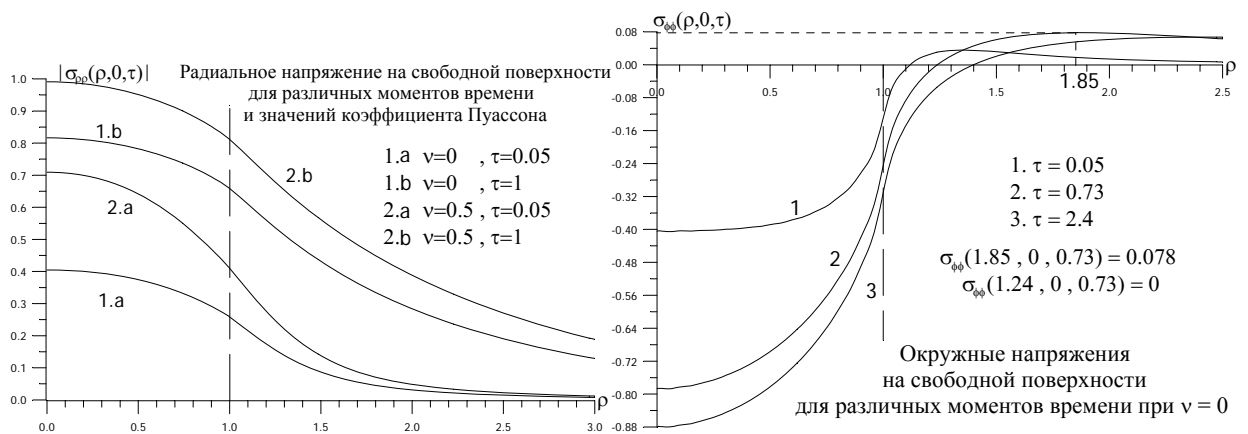
$$\sigma_{\rho\rho}(1,0,\tau) = -8/3\pi + 4\sqrt{\tau} \{ \exp(-1/2\tau)[(3+1/\tau)I_0(1/2\tau) + (2+1/\tau)I_1(1/2\tau)] - 3 \} / \sqrt{\pi} + 2(1-2\nu)\sqrt{\tau} [1 - {}_2F_2(1/2,1/2; 1,3/2; -1/\tau)] / (1-\nu)\sqrt{\pi}. \quad (8)$$

Для малых и больших τ формула (8) упрощается:

$$\sigma_{\rho\rho}(1,0,\tau \ll 1) \approx -2\sqrt{\tau/\pi}/(1-\nu) - (1-2\nu)\tau \ln(1/\tau)/(1-\nu)\pi + \tau [6 - (1-2\nu)(4\ln 2 + C)/(1-\nu)]/\pi - \tau^2/\pi + \dots;$$

$$\sigma_{\rho\rho}(1,0,\tau \gg 1) \approx -8/3\pi + (1-2\nu)/3\sqrt{\pi\tau}(1-\nu) - (1+8\nu)/120\sqrt{\pi\tau^{3/2}}(1-\nu) + \dots$$

Рис. 6



4.4 Окружное напряжение

Компонента $\sigma_{\varphi\varphi}$ на свободной поверхности всегда отрицательна внутри зоны нагрева (см. Рис.6). Что же касается области $x = 0, \rho > 1$, то здесь у материалов, с коэффициентом Пуассона $\nu < 1/2$ возникает область азимутального растяжения, внутренняя граница которой начинается при $\tau = +0$ на внешней стороне края нагреваемой области и далее неограниченно расширяется в радиальном направлении с течением времени (см. Рис.6). При $\nu = 1/2$ на свободной поверхности возможно только азимутальное сжатие.

На краю нагреваемой области величина $\sigma_{\varphi\varphi}$ вычисляется в явном виде:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(1,0,\tau) = -4/3\pi + 2\sqrt{\tau} \{ \exp(-1/2\tau)[(1/3\tau-1)I_0(1/2\tau) + (1/3\tau-4/3)I_1(1/2\tau)] + 1 \} / \sqrt{\pi} - 2(2-\nu)\sqrt{\tau} [1 - {}_2F_2(1/2,1/2; 1,3/2; -1/\tau)] / (1-\nu)\sqrt{\pi}. \quad (9)$$

Для малых и больших τ формула (9) упрощается:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(1,0,\tau \ll 1) \approx -2\sqrt{\tau/\pi}/(1-\nu) + (2-\nu)\tau \ln(1/\tau)/(1-\nu)\pi + \tau [(2-\nu)(4\ln 2 + C)/(1-\nu) - 5]/\pi + 3\tau^2/2\pi + ;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(1,0,\tau \gg 1) \approx -4/3\pi + (1-2\nu)/3\sqrt{\pi\tau}(1-\nu) + (1+8\nu)/120\sqrt{\pi\tau^{3/2}}(1-\nu) + \dots$$

Заметим, что разность окружного и радиального напряжений на границе полупространства перестает зависеть от величины коэффициента Пуассона.

4.5. Стационарное термоупругое поле

Известно, что при $\tau \rightarrow \infty$ в полуограниченном теле, нагреваемом постоянным тепловым потоком через конечный участок поверхности, реализуется плосконапряженное состояние, т.е. отличными от нуля являются только компоненты $\sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$, причем обе они не зависят от коэффициента Пуассона и могут принимать только отрицательные значения.

Найденное в замкнутой форме стационарное термоупругое поле выражается через совокупность полных и неполных эллиптических интегралов первого и второго рода. Однако в общем виде оно достаточно громоздко для данной статьи. Поэтому приведем лишь частные случаи, при которых полученные выражения для компонент тензора напряжений принимают более простой вид:

1) На оси симметрии имеет место равномерное двухосное сжатие, абсолютная величина которого максимальна в начале координат и монотонно убывает с глубиной (см. [3]).

$$\sigma_{\rho\rho}(0, x, \infty) = \sigma_{\varphi\varphi}(0, x, \infty) = -(\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

Отметим, что во всех точках полупространства вне оси симметрии справедливо неравенство:

$$|\sigma_{\rho\rho}(\rho, x, \infty)| > |\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, x, \infty)|.$$

2) Термоупругое поле на свободной поверхности

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\rho, 0, \infty) &= -4[(1/\rho^2 + 1)\mathbf{E}(\rho) - (1/\rho^2 - 1)\mathbf{K}(\rho)]/3\pi \quad \rho \leq 1, & = -4[(\rho + 1/\rho)\mathbf{E}(1/\rho) - (\rho - 1/\rho)\mathbf{K}(1/\rho)]/3\pi \quad \rho \geq 1; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, 0, \infty) &= -4[(2 - 1/\rho^2)\mathbf{E}(\rho) + (1/\rho^2 - 1)\mathbf{K}(\rho)]/3\pi \quad \rho \leq 1, & = -4[(2\rho - 1/\rho)\mathbf{K}(1/\rho) - 2(\rho - 1/\rho)\mathbf{E}(1/\rho)]/3\pi \quad \rho \geq 1. \end{aligned}$$

На краю зоны нагрева выполняются равенства:

$$\sigma_{\rho\rho}(1, 0, \infty) = -8/3\pi \approx -0.8488, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(1, 0, \infty) = -4/3\pi \approx -0.4244.$$

Распределения обоих напряжений имеют куполообразный вид. По мере удаления от центра к периферии абсолютные величины как $\sigma_{\rho\rho}$ так и $\sigma_{\varphi\varphi}$ монотонно убывают, стремясь к нулю при $\rho \rightarrow \infty$.

Вблизи начала координат и на значительном удалении от него справедливы асимптотики [4]:

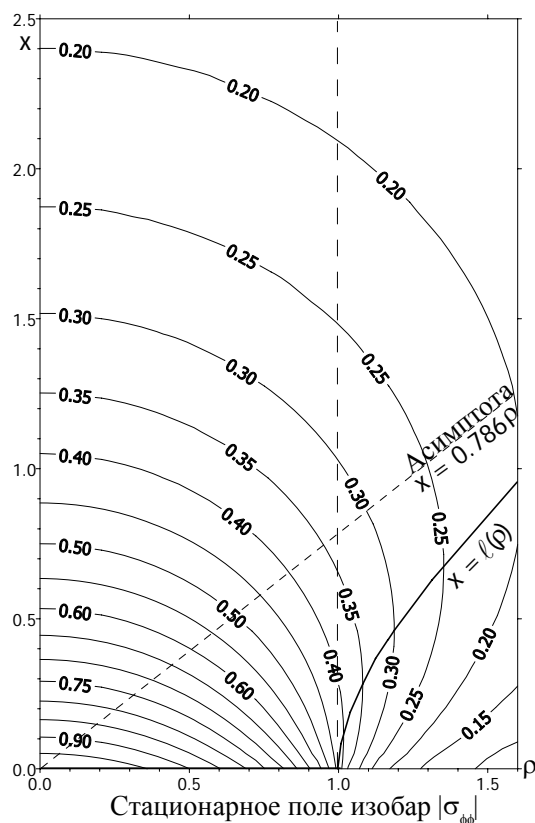
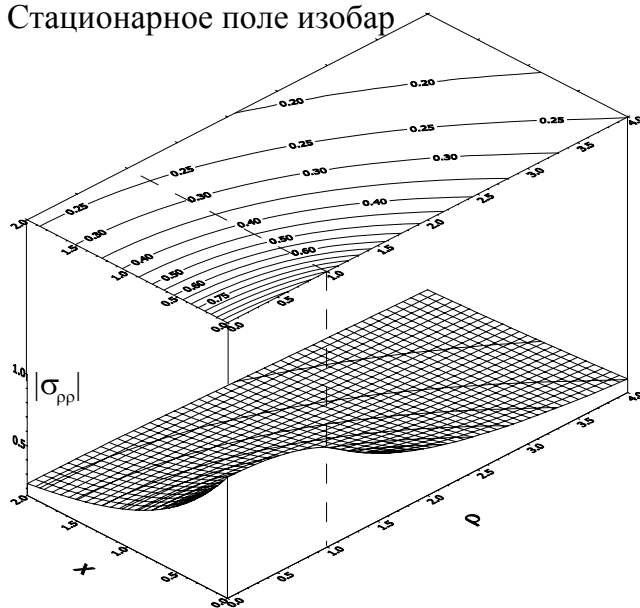
$$\begin{aligned} |\sigma_{\rho\rho}(\rho \ll 1, 0, \infty)| &\approx 1 - \rho^2/8, & |\sigma_{\rho\rho}(\rho \gg 1, 0, \infty)| &\approx 1/\rho; \\ |\sigma_{\varphi\varphi}(\rho \ll 1, 0, \infty)| &\approx 1 - 3\rho^2/8, & |\sigma_{\varphi\varphi}(\rho \gg 1, 0, \infty)| &\approx 1/4\rho^3. \end{aligned}$$

3) На цилиндрической поверхности единичного радиуса имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(1, x, \infty) &= -\{\sqrt{x^2 + 4}[(4 - x^2)\mathbf{E}(2/\sqrt{x^2 + 4}) + x^2\mathbf{K}(2/\sqrt{x^2 + 4})]\}/3\pi + x, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(1, x, \infty) &= -\sqrt{x^2 + 4}[(2 + x^2)\mathbf{E}(2/\sqrt{x^2 + 4}) - x^2\mathbf{K}(2/\sqrt{x^2 + 4})]/3\pi. \end{aligned}$$

Здесь оба напряжения монотонно убывают с глубиной, стремясь к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Стационарное поле изобар



Отметим, что компонента $\sigma_{\rho\rho}(\rho, x, \infty)$ обладает не замеченным в [3] свойством радиальной инверсии: $\rho\sigma_{\rho\rho}(\rho, x, \infty) = \sigma_{\rho\rho}(1/\rho, x/\rho, \infty)$, позволяющим сократить объем необходимых расчетов, ограничившись интервалом $0 < \rho \leq 1$.

Напряжение $|\sigma_{\rho\rho}|$, принимая максимальные значения на границе полупространства, монотонно убывает с глубиной при всех $\rho = \text{const}$ (см. Рис.7), тогда как окружная компонента ведет себя аналогично только при $0 < \rho \leq 1$. В области $\rho > 1$ наибольшая величина $|\sigma_{\phi\phi}|$ достигается на некоторой линии максимумов $x = l(\rho)$, расположенной внутри тела, координаты которой определяются из неявного алгебраического уравнения, решаемого численно. Напряжение $|\sigma_{\phi\phi}|$ вдоль линии максимумов имеет своеобразный «гребешок», высота которого монотонно уменьшается при удалении от центра к периферии. Это хорошо видно на Рис. 8

Скорость установления стационарного режима тем выше, чем больше величина коэффициента Пуассона. Критериальные неравенства, при выполнении которых существование стационарного термоупругого состояния имеет физический смысл, определены в работе [5].

5. РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИОННОГО КОНТУРА

Для определения нестационарного профиля свободной поверхности возникающего вследствие термических деформаций нагреваемого тела, в интегральном виде найдено радиальное распределение осевой компоненты вектора упругих перемещений на границе полупространства $u_z(r, 0, t)$. Высота искривленной поверхности в каждый момент времени максимальна в начале

координат, монотонно убывает по мере удаления от центра к периферии и стремится к нулю при $\rho \gg 1$ (см. Рис.9).

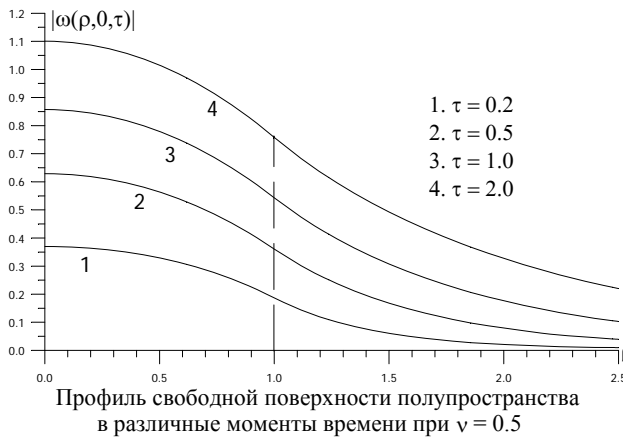


Рис.9

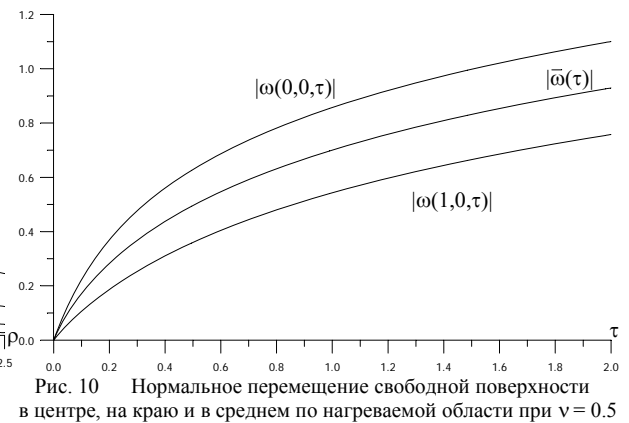


Рис.10

Распределение осевого смещения в начале нагрева имеет вид ступеньки: $\omega(\rho,0,\tau \ll 1) \approx -2(1+\nu)\tau H(1-\rho)$. Здесь для удобства введена безразмерная величина смещения $\omega(\rho,0,\tau) = ku_z(r,0,t)/(qR^2\alpha)$.

Стационарной формы контура не существует и при $\tau \rightarrow \infty$ нормальное смещение каждой точки поверхности неограниченно возрастает по логарифмическому закону [3] (см. Рис.10).

Приведем найденную в явном виде осевую координату центральной точки:

$$\begin{aligned} \omega(0,0,\tau) = & -(1+\nu)\{ {}_3F_3(1,1,3/2; 2,2,2; -1/4\tau)/8\tau + \ln(16\tau) \\ & - C e^{-1/8\tau} [I_0(1/8\tau) + I_1(1/8\tau)] + 8\tau [1 - e^{-1/8\tau} I_0(1/8\tau)] \} / 4. \end{aligned} \quad (10)$$

Для малых и больших значений τ имеют место асимптотические представления формулы (10): $\omega(0,0,\tau \ll 1) \approx -2(1+\nu)\tau (1 - 4\sqrt{\tau}/3\sqrt{\pi} + \dots)$, $\omega(0,0,\tau \gg 1) \approx -(1+\nu)[\ln(16\tau) - C + 9/64\tau + \dots]/4$.

Отметим, что с помощью найденного точного выражения для профиля свободной поверхности можно легко определить фокальное расстояние образовавшегося «термического зеркала».

6. ВЫВОДЫ

В работе теоретически рассмотрена одна из основных задач несвязанной квазистатической линейной термоупругости. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании разрушения и трещинообразования в хрупких материалах под действием термических напряжений, вызванных поверхностным нагревом (например, при термобурении горных пород), а также при изучении термических деформаций элементов лазерной оптики.

Работа выполнена при поддержке CDRF(проект НОЦ–РЕ 009).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

T – температура, $^{\circ}K$; θ – безразмерная температура; R – радиус кругового источника тепла, м; r – радиальная координата, м; ρ – безразмерная радиальная координата; z – осевая координата, м; x – безразмерная осевая координата; t – время, с; τ – безразмерное время; E – модуль Юнга, Н/м²; a

– коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$; k – коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/\text{м}^0\text{К}$; Q – полная тепловая мощность, Вт ; q – поверхностная плотность мощности, $\text{Вт}/\text{м}^2$; H – единичная функция Хевисайда; \mathbf{K} , \mathbf{E} – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; I_0 , I_1 – функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядка; J_0 , J_1 – функции Бесселя от действительного аргумента нулевого и первого порядка; σ_{ij} – безразмерные компоненты тензора напряжений; p_{ij} – размерные компоненты тензора напряжений, $\text{Н}/\text{м}^2$; A – масштабный коэффициент напряжений, $\text{Н}/\text{м}^2$; ν – коэффициент Пуассона, $0 \leq \nu \leq 1/2$; Φ – термоупругий потенциал перемещений; Δ – лапласиан; в цилиндрических координатах $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial z^2$; α – коэффициент линейного температурного расширения, $^0\text{К}^{-1}$; $u_z(r,0,t)$ – величина осевого перемещения поверхности, м ; $\omega(\rho,0,\tau)$ – безразмерная величина осевого перемещения; ${}_2F_2$, ${}_3F_3$ – обобщенные гипергеометрические функции; $C = 0.5772$ – постоянная Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488с.
2. Пинскер В. А. Нестационарное температурное поле в полуограниченном теле, нагреваемом круговым поверхностным источником тепла // ТВТ. 2006. Т.44. № 1. С. 127–135.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364с.
4. Goldstein R.V., Pinsker V.A. Analytical Study of Quasistatic Thermoelastic Fields in Half-Bounded Solid Heated by Disk Shaped Heat Source // Thermal Stresses 03: Proc. of the 5-th Int. Congress on Thermal Stresses and Related Topics / ed by L. Librescu and P. Marzocca. Blackburg, Va, USA, 8-11 June 2003. vol. 2. P. WA 321–324.
5. Пинскер В.А. О модели термического разрушения горных пород под действием интенсивного поверхностного нагрева при бурении скважин высокотемпературным способом // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках: Тр. 15-й Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. М.: Издательство МЭИ, 2005. Т.2. С. 323-326.
6. Goldstein R.V., Pinsker V.A. Uncoupled Quasi-Steady Thermoelastic Stresses in Semispace Heated by Surface Circular Heat Source. // Thermal Stresses 07: Proc of the 7-th Int. Congress on Thermal Stresses. / Ed. by C.H. Chao and C.Y. Lin. Taipei, Taiwan, 4-7 June 2007, vol.1, pp. 413-416.