

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕПЛООВОГО РЕЗОНАТОРА

О.Н. Шабловский, И.А. Концевой

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

Проблемы термической генерации нелинейных колебаний в материалах представляют значительный интерес для физики волн и ее приложений. В настоящее время накоплен большой опыт исследований акустических резонаторов, см. [1] и приведенную там библиографию. В условиях хорошо выраженной тепловой неравновесности некоторые сверхпроводники могут служить основой теплового резонатора [2]: при слабом источнике тепловых возмущений в нем происходит формирование нелинейных структур. В работах [3, 4] изучены собственные колебания большой амплитуды в тепловых резонаторах трех типов: открытом, полуоткрытом и закрытом. Расчеты проведены для высокотемпературной сверхпроводящей керамики на основе иттрия в двух температурных областях с сильно выраженными нелинейностями теплофизических свойств материала. В данном докладе изложены результаты исследования вынужденных колебаний полуоткрытого теплового резонатора.

Цель работы: изучить вынужденные колебания локально-неравновесного теплового поля в условиях импульсно-периодического воздействия на образец материала.

Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии:

$$\frac{q}{\gamma} + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$u = \int_0^T c(T) dT, \quad V = \int_0^T \frac{\lambda(T)}{\gamma(T)} dT = \int_0^u w^2(u) du; \quad w^2 = \frac{\lambda}{c\gamma},$$

где x – декартова координата; t – время; T – температура; q – удельный тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; c – объемная теплоемкость; γ – время релаксации теплового потока; w – скорость распространения тепловых возмущений. Искомые функции: $T(x,t)$, $q(x,t)$, $x \in [0, h]$, $t \geq 0$; h – толщина слоя материала. Современные методы исследования локально-неравновесной модели теплопереноса (1), (2) представлены в [2]; там же проведен подробный анализ возникновения градиентной катастрофы и свойств ударных тепловых волн. В соответствии с этими результатами присоединяем к левой части уравнения (1) слагаемое

$$\Psi \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

где ρ – плотность, Ψ – коэффициент искусственной диссипации. Этот коэффициент является аналогом газодинамического коэффициента искусственной вязкости и применяется для того, чтобы при численном решении сглаживать сильные разрывы, которые могут появляться в ходе эволюции теплового поля.

Граничные и начальные условия:

$$q(x=0, t) = q_0(t), \quad T(x=h, t) = T_w \equiv const; \quad (3)$$

$$q(x, t=0) = 0, \quad T(x, t=0) = T_w, \quad (4)$$

где $q_0(t)$ – плотность потока энергии, поглощенной поверхностью образца материала, T_w – температура правой стенки.

Принимаем здесь λ , c , γ постоянными и обращаем основное внимание на характер возбуждения колебаний. Вопрос о роли нелинейных свойств $\lambda(T)$, $c(T)$ составляет предмет нашего отдельного исследования. Работаем с безразмерными величинами. Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, полагая

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}\lambda', \quad c \rightarrow \tilde{c}c', \quad \gamma \rightarrow \gamma', \quad T \rightarrow T', \quad q \rightarrow q', \quad x \rightarrow x', \quad t \rightarrow t',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b}, \quad \tilde{c} = \frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b}$$

составлены из масштабов величин (они отмечены индексом b), применяемых для обезразмеривания: $T = T'T_b$, $\gamma \rightarrow \gamma't_b$ и т.д.

Величина $h = x_b$ – параметр резонатора. Образцу заданной толщины h свойственны критические частоты: собственные и резонансные. Первая собственная частота равна $\omega_1 = \pi w/h$, где $w = (\lambda/c\gamma)^{1/2} = w_b$ – характерная скорость тепловой волны для изучаемого материала. Масштаб времени: $t_b = x_b/w_b$, и тогда $\omega'_1 = \pi$. В дальнейшем штрих над безразмерными величинами не пишем. Применяем только безразмерные функции безразмерных аргументов. Решение краевой задачи (1)-(4) выполняем численным методом интегральных соотношений А.А. Дородницына; применяем гиперболический вариант алгоритма построения расчетной схемы [5]. В n -ом приближении отрезок $[0, h]$ делится на n полос: $x_i = ih/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. В данной задаче $n = 6$. Строим замкнутую систему интегральных соотношений и редуцируем их к аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоговая задача Коши решается методом Рунге-Кутты пятого порядка точности. В результате получаем температуру $T(x_i, t)$ и тепловой поток $q(x_i, t)$ на границах полос. Контроль точности расчетной схемы основан на использовании различных проверочных вариантов построения «кусочных» и «сквозных» аппроксимаций. Кроме того, выполнялось сравнение с точным решением нелинейных уравнений (1), (2). Проведенные тестовые расчеты подтвердили высокую точность вычислений.

Импульсно-периодическое тепловое воздействие на левую границу образца определяется функцией

$$q_0(t) = H \left(\sin \frac{pt}{2} \right)^{2m},$$

где $m \geq 1$ – целое число; $p, H - const$. Параметр m характеризует длительность паузы $t^{(m)}$ между импульсами лазерного излучения; при $m = 1$ паузы отсутствуют: $t^{(1)} = 0$.

Приведем здесь результаты нескольких серий расчетов модельного примера, для которого были приняты следующие значения основных параметров: $\gamma = 10$ с, $\lambda_b = \lambda = 10$ Вт/(м·К), $c_b = c = 10^6$ Дж/(м³·К), $\rho = 5 \cdot 10^3$ кг/м³; $T_b = 10^3$ К; $q_b = 10^3$ Вт/м²;

$$w_b = \left(\frac{\lambda_b}{\gamma c_b} \right)^{1/2} = 10^{-3} \text{ м/с}; \quad x_b = h = 10^{-3} \text{ м}; \quad t_b = \frac{x_b}{w_b} = 1 \text{ с}.$$

При обработке результатов применяем следующие критерии:

безразмерный тепловой поток $Q = \frac{h q(x,t)}{T_w \lambda}$;

безразмерный градиент температуры $g = \frac{h}{T_w} \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)$;

параметр энергии $E = \frac{c_p T(x,t)}{w^2}$;

параметр неравновесности $\Omega^{-2} = \frac{q^2(x,t)}{w^2 c^2 T^2(x,t)}$;

квадрат теплового числа Маха $M^2 = \frac{v^2}{w^2}$, $v^2 = \frac{q h \omega_1}{T c}$;

квадрат скорости процесса $V^2 = \frac{v^2}{(x_b / t_b)^2}$;

амплитуда температуры $A_T \equiv A_T(x,t) = \frac{T(x,t)}{T_w}$;

амплитуда теплового потока $A_q \equiv q(x,t)$;

производство энтропии $\Sigma = \frac{\sigma}{\sigma_b}$,

где $\sigma = q^2 / (\lambda T^2)$, [6]; $\sigma_b = \lambda_b / x_b^2$.

Далее приводится количественная информация, относящаяся к одному периоду установившихся во времени вынужденных колебаний ($H = 10^4$ Вт/м²).

Первая серия расчетов ($m = 2$) имеет целью сравнение свойств колебаний при трех частотах: $p = p_r / 2$, $p = p_r$, $p = 3p_r / 2$, где $p_r = \omega_1 / 2 = \pi / 2$ – резонансная частота. На рис. 1 хорошо видна трансформация колебаний теплового потока и температуры при переходе от субрезонансной (рис. 1,а) к сверхрезонансной (рис. 1,б) частоте. На рис. 2 представлены гистерезисные свойства локально-неравновесного теплового поля. Конфигурация петель гистерезиса на резонансной частоте существенно отличается от субрезонансного и сверхрезонансного вариантов. Обращает на себя внимание факт почти полного отсутствия гистерезиса при производстве энтропии на

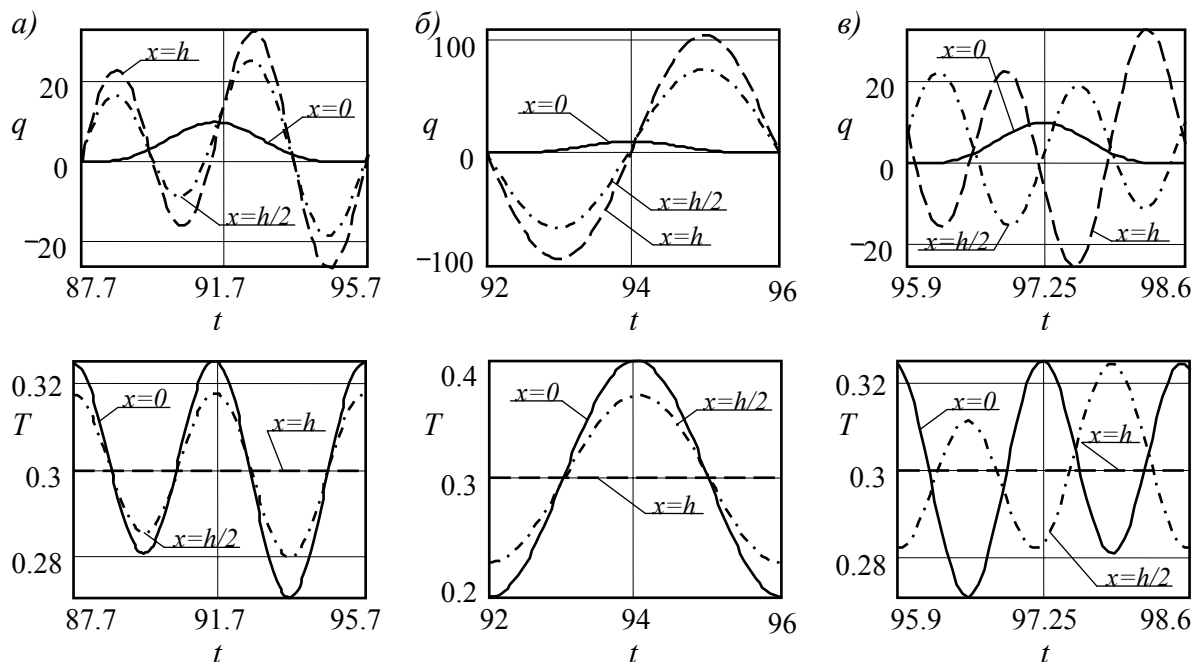


Рис. 1. Формы колебаний теплового потока и температуры:
 а) $p = \pi/4$; б) $p = \pi/2$; в) $p = 3\pi/4$.

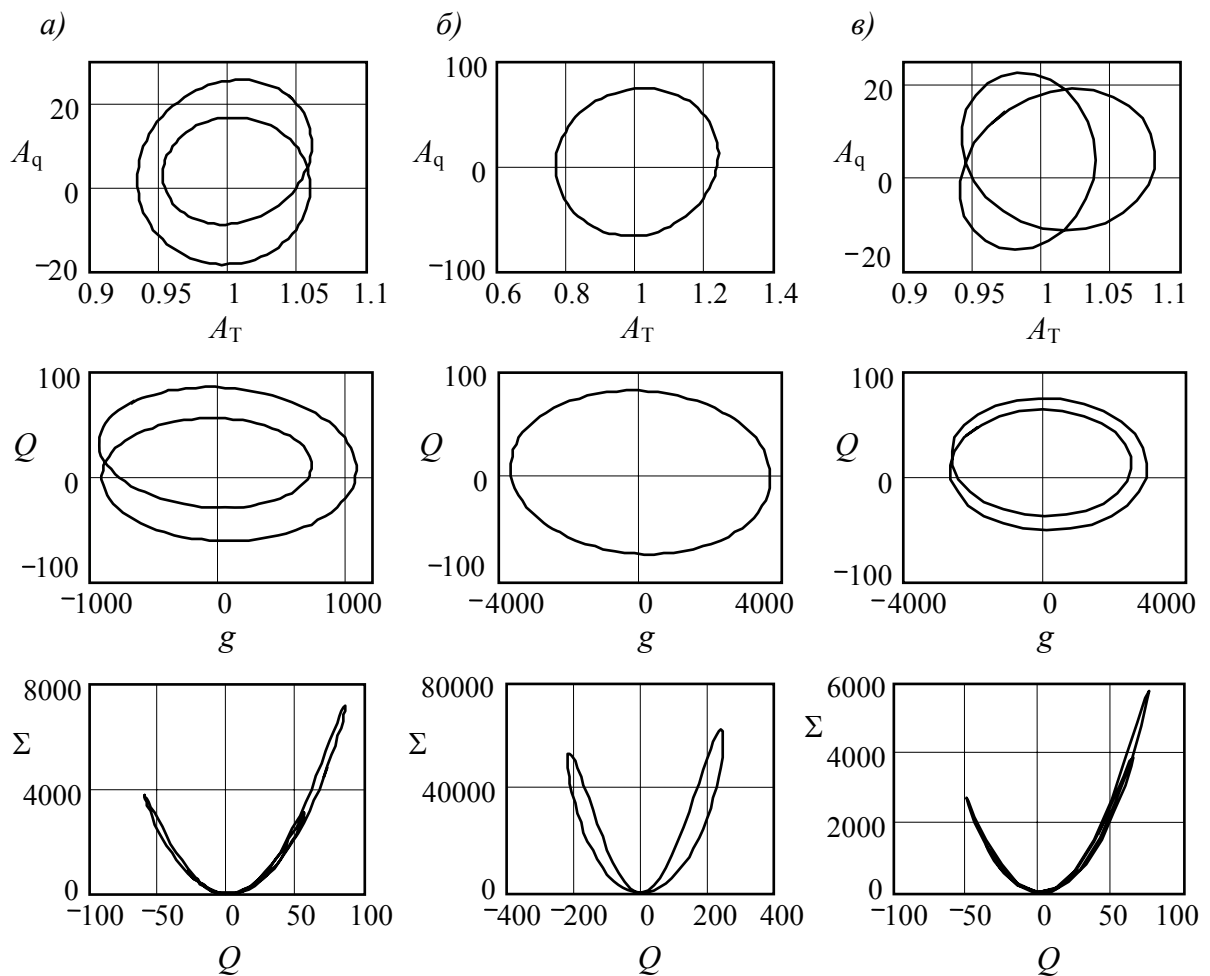


Рис. 2. Фазовые портреты колебаний в средней точке $x = h/2$ образца:
 а) $p = \pi/4$; б) $p = \pi/2$; в) $p = 3\pi/4$.

субрезонансной и сверхрезонансной частотах: на плоскости (Q, Σ) соответствующие линии имеют вид обычных парабол с ветвями, обращенными вверх. На резонансной частоте этот гистерезис хорошо выражен. Известно [2], что в локально-неравновесных условиях может возникнуть неклассическая ситуация, когда векторы q и $gradT$ направлены в одну сторону. В данном процессе на плоскости (g, Q) мы наблюдаем чередование классической ($Qg < 0$) и неклассической ($Qg > 0$) ситуаций, что объясняется волновым характером распространения тепловых возмущений.

Вторая серия расчетов имеет целью проследить влияние длительности паузы $t^{(m)}$ между импульсами излучения на свойства теплообмена при резонансной частоте возбуждения $p = p_r$. Графики на рис. 3 дают возможность судить о закономерностях формирования связи «градиент температуры – тепловой поток» на входе в резонатор ($x = 0$) и на выходе из него ($x = h$).

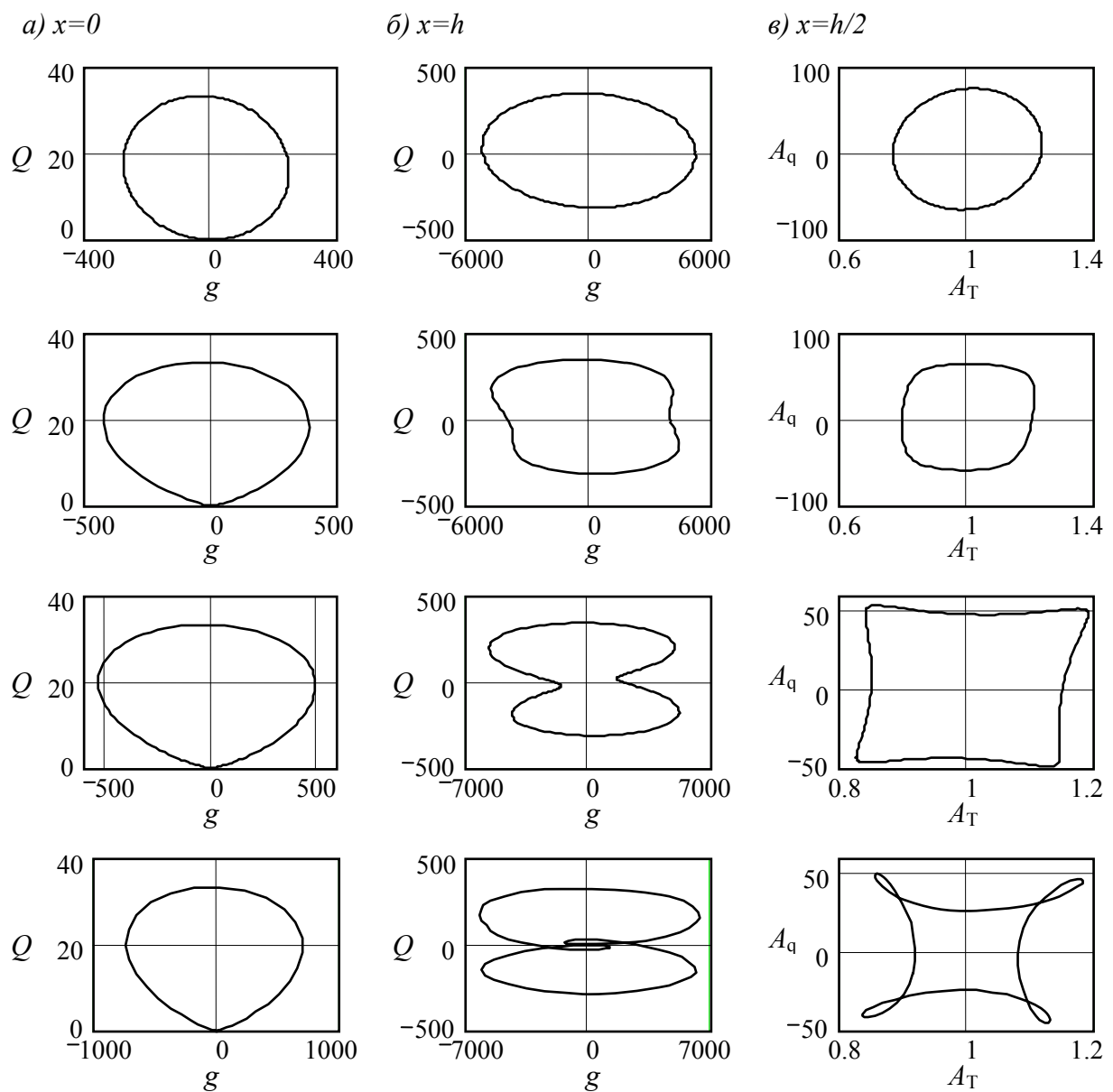


Рис. 3. Свойства теплового поля на резонансной частоте $p = p_r$, при увеличении паузы между импульсами излучения: 1-я строка рисунков – пауз нет, $m = 1$; 2-я, 3-я, 4-я строки – $m = 3; 5; 10$ соответственно.

На правой границе образца по мере увеличения параметра m наблюдается деформирование исходной линии ($m=1$, пауз нет), близкой к окружности, в «восьмерку» (рис. 3,б). Столь же сильное влияние оказывает рост $t^{(m)}$ на связь температуры и теплового потока (рис. 3,в).

Итогом третьей серии расчетов является построение резонансных кривых на плоскости «частота возбуждения – амплитуда» при различных толщинах образца. Если пауз нет ($m=1$), то наблюдается традиционный вариант, когда максимум амплитуды теплового потока достигается при $p = p_r = \omega_1/2$, рис. 4,а. Наличие пауз дает принципиальные изменения: при прочих равных условиях появляются одна либо две пары дополнительных резонансных частот, рис. 4,б. На рис. 4 хорошо видна сильная чувствительность амплитуды к изменению толщины h . Это объясняется интенсивным взаимодействием тепловых волн с границами образца. Амплитуда на резонансной частоте p_r не зависит от длительности паузы.

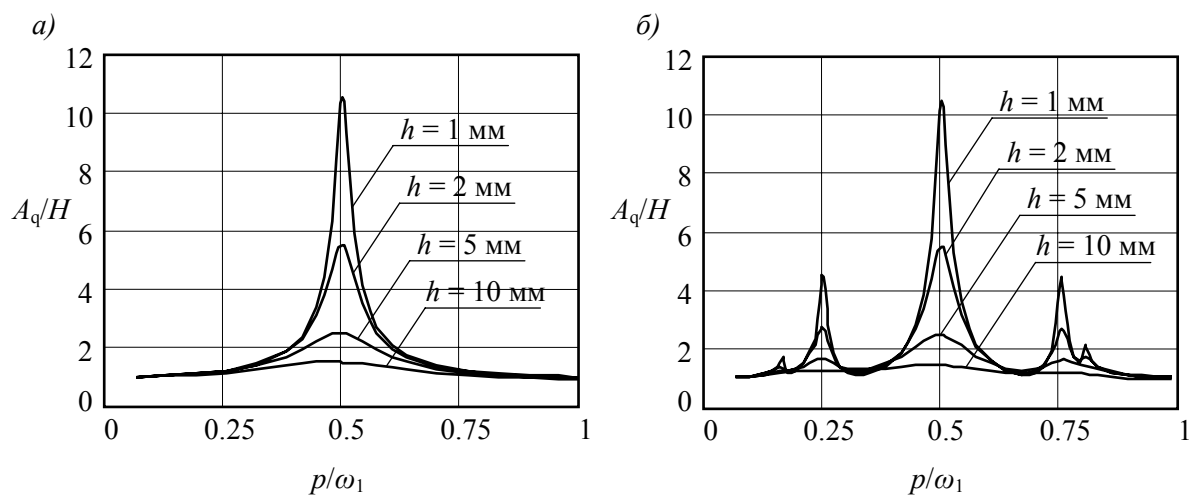


Рис. 4. Резонансные кривые полуоткрытого теплового резонатора: а) $m=1$; б) $m=3$.

На рис. 5 ($m=1$) даны резонансные кривые, соответствующие критериям Ω^{-2} , E , V^2 , M^2 , вычисленным при максимальных значениях температуры $T = T_{\max}$ и теплового потока $q = q_{\max}$, достигаемым в сечениях образца $x = 0; h/2; h$. Здесь следует обратить внимание на существование слабо выраженного минимума критериев Ω^{-2} , V^2 , M^2 при $x = h$.

Выводы

1. Принципиальное отличие от акустического резонатора состоит в следующем. Колебания газа в трубе возбуждаются поршнем, который движется по заданному периодическому закону: его скорость колеблется около нуля, т.е. является знакопеременной функцией времени. Для теплового резонатора функция $q_0(t) \geq 0$ описывает воздействие импульсно-периодического лазера и является неотрицательной периодической. Существенным фактором воздействия служит длительность паузы между импульсами излучения. Наличие пауз дает принципиальные изменения в поведении резонансной кривой: появляются одна либо две пары дополнительных резонансных частот.

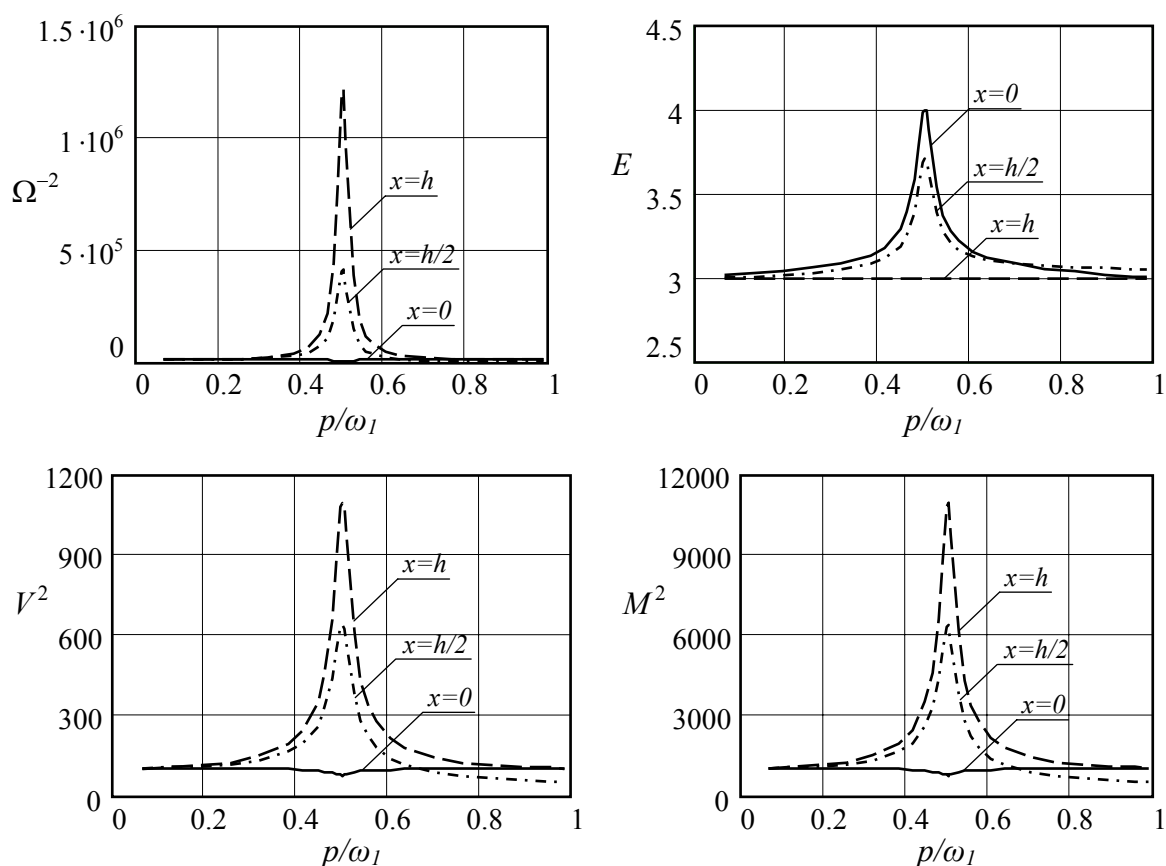


Рис. 5. Амплитудно-частотные свойства полукрытого теплового резонатора

2. При вынужденных колебаниях теплового резонатора в каждом сечении образца происходит чередование во времени классической ($\mathbf{q} \cdot \text{grad}T < 0$) и неклассической ($\mathbf{q} \cdot \text{grad}T > 0$) ситуаций.
3. Формы установившихся во времени колебаний при субрезонансной, резонансной и сверхрезонансной частотах в значительной степени различаются. Гистерезисные явления хорошо выражены на плоскостях «градиент температуры – тепловой поток», «параметр неравновесности – тепловой поток», «тепловой поток – температура». Гистерезис на плоскости «тепловой поток – производство энтропии» отчетливо наблюдается на резонансной частоте.

Литература

- [1] Руденко О.В., Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Хедберг К.М. Рост энергии и добротности нелинейного резонатора с усилением его потерь. Доклады Российской Академии Наук. 2002. Т. 383, №3. С. 330-333.
- [2] Шабловский О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. Гомель: ГГТУ имени П.О. Сухого. 2003.
- [3] Shablovsky O.N., Kontsevov I.A. Free oscillations of large amplitude in a heat resonator. Physics of Shock Waves, Combustion, Detonation and Non-Equilibrium Processes. Minsk, 2005. P. 157-158.
- [4] Шабловский О.Н., Концевой И.А. Большие собственные колебания теплового резонатора. Материалы, Технологии, Инструменты. 2006. Т.11, №2. С. 9-14.
- [5] Коробейников В.П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука. 1985.
- [6] Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer, 1996.